§3. Equations aux Opérateurs Compacts

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f; \quad \varphi,\ f \in X,$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue.

Théorème 1

Le noyau de l'opérateur T défini par,

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X;\ \ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie.

Démonstration

• En effet, le noyau $N(T\ )$ d'un opérateur linéaire est un sous espace vectoriel, de plus, soit $\varphi_n \in N(T)$ une suite convergente vers la fonction φ alors, de la continuité de l'opérateur T, on obtient

$$T\varphi_n = 0 \Rightarrow\ T\varphi = 0.$$

D'où le noyau $N(T)$ est fermé.

• D'autres part, toute fonction $\varphi \in N(T)$ satisfait l'équation $A\varphi = \varphi$; d'où la restriction de l'opérateur A à l'ensemble $N(T)$ coïncide avec l'identité; A étant compact de X dans X il en est de même de $N(T)$ dans $N(T)$ et par conséquent $N(T)$ est de dimension finie car l'identité ne peut être compact que dans un espace de dimension finie.

Théorème 2

La suite d'ensembles des noyaux

$$N(T),\ N(T^2), ...,\ N(T^n), ...$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\{0\} \subset N(T) \subset N(T^2) \subset ... \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = ...$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$.

Démonstration

- L'inclusion des ensembles $N(T^n)$ est évidente car, on a

$$\begin{aligned} \varphi \in N(T^n) \ &\Rightarrow T^n\varphi = 0 \\ &\Rightarrow T(T^n\varphi) = T^{n+1}\varphi = 0 \\ &\Rightarrow \varphi \in N(T^{n+1}). \end{aligned}$$

D'où l'inclusion

$$N(T^n) \subset N(T^{n+1}). \tag{1}$$

- Supposons qu'il n'existe pas un entier p tel que, la suite $N(T^{\ n})$ soit stationnaire c'est à dire,

$$N(T^m) \neq N(T^n), \quad \text{pour tout} \ \ m, n \in \mathbb{N}, \ \text{avec} \ m < n.$$

En particulier, de l'inclusion des sous espaces fermés $N(T^{n-1}) \subset N(T^n)$, Il existe alors un élément $\varphi_n \in N(T^n)$, avec $\| \varphi_n \| = 1$ tel que,

$$\| \varphi_n - \varphi_{n-1} \| \geq \frac{1}{2}, \ \ \text{pour tout} \ \varphi_{n-1} \in N(T^{n-1}).$$

En général, pour toute suite $\varphi_n \in N(T^n)$, on a la relation suivante

$$\| A\varphi_n - A\varphi_m \| = \| \varphi_n - T\varphi_n - \varphi_m + T\varphi_m \| \geq \frac{1}{2}, \ \forall\, m, n \quad \text{avec} \ m < n, \tag{2}$$

car les éléments de la suite $(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n)$ appartiennent au sous espace $N(T^{n-1})$.

En effet, par composition par T^{n-1}

$$T^{n-1}(\varphi_m - T\varphi_m + T\varphi_n) = T^{n-1}\varphi_m - T^n\varphi_m + T^n\varphi_n = 0,$$

et cela dû aux relations suivantes

$$\varphi_m \in N(T^m) \subset N(T^{n-1}) \subset N(T^n) \ \ \text{et} \ \varphi_n \in N(T^n).$$

La suite φ_n étant bornée, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisir un élément φ_n de norme égale à un. En vertu de la compacité de l'opérateur A, on peut extraire de la suite $A\varphi_n$ une sous suite convergente. Contradiction avec (2). D'où l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a

$$N(T^{n-1}) = N(T^n).$$

Il reste à démontrer que $N(T^n) = N(T^{n+1})$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \varphi \in N(T^{n+1}) \quad & \Rightarrow T^{n+1}\varphi = T^n(T\varphi) = 0 \\ & \Rightarrow T\varphi \in N(T^n) = N(T^{n-1}) \\ & \Rightarrow T^{n-1}(T\varphi) = T^n\varphi = 0 \\ & \Rightarrow \varphi \in N(T^n). \end{aligned}$$

D'où, on a

$$N(T^{n+1}) \subset N(T^n) \ .$$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après (1). D'où l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T) \subset ... \subset N(T^{p-1}) \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = N(T^{p+2}) = ...$$

où l'entier p est donné par

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}; \ \text{ tel que } N(T^k) = N(T^{k+1})\}.$$

Théorème 3

L'image de l'opérateur T défini par,

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \ \text{ telle que } \ \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé.

Démonstration

• Il est connu que l'image $R(T)$ d'un l'opérateur linéaire T est un sous espace.

Soit f un élément de la fermeture $\overline{T(X)}$, alors il existe une suite f_n de l'ensemble $T(X)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

En d'autres termes, ça implique l'existence d'une suite φ_n de X telle que

$$T\varphi_n = f_n,$$

avec la relation de convergence

$$\lim_{n\to\infty} T\varphi_n = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

• Supposons que la suite φ_n soit bornée, alors il existe une sous suite $\varphi_{n(k)}$ telle que la suite $A\varphi_{n(k)}$ soit convergente. D'où la convergence de la sous suite $\varphi_{n(k)}$ vers un élément φ de X, car, on a

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} - \lim_{k\to\infty} A\varphi_{n(k)} = \varphi \in X.$$

Dû à la continuité de l'opérateur T, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} = T(\lim_{k\to\infty} \varphi_{n(k)}) = T\varphi = f \in T(X) = \overline{T(X)}$$

• Supposons que la suite φ_n ne soit bornée, alors, on a

Si $\varphi_n \in N(T)$, on aura

$$T\varphi_n = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} T\varphi_n = 0 = f \in T(X) = \overline{T(X)},$$

comme sous espace contenant l'élément nul.

Si $\varphi_n \notin N(T)$, on prend le sous espace G de X engendré par φ_n et $N(T)$ défini par

$$G = \text{vect}\ \{\varphi_n + N(T)\}.$$

Le sous espace $N(T)$ étant fermé dans G. D'où l'existence d'un élément $\psi_n \in G$ de norme égale à l'unité $\|\psi_n\| = 1$ tel que

$$\|\psi_n - \chi_n\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall \chi_n \in N(T),$$

avec la relation suivante

$$\psi_n = a_n\varphi_n + \chi_n\ , \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad \chi_n \in N(T).$$

Il est à remarquer qu'il n'existe pas de sous suite $a_{n(k)}$ de la suite a_n convergente vers l'élément nul, car si, on suppose qu'il existe une telle suite; c'est à dire $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = 0$, on aura

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} T\psi_{n(k)} &= \lim_{k\to\infty} (a_{n(k)} T\varphi_{n(k)}) + \lim_{k\to\infty} T\chi_{n(k)} \\ &= \lim_{k\to\infty} a_{n(k)} . \lim_{k\to\infty} T\varphi_{n(k)} = 0.f = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit; il existe une sous suite $\psi_{n(j)}$ de la sous suite $\psi_{n(k)}$ de la suite bornée ψ_n telle que $A\psi_{n(j)}$ converge vers un élément ψ de X, ce qui implique la convergence de la sous suite $\psi_{n(j)}$ vers le même élément ψ de X car, on a

$$\lim_{j\to\infty}\psi_{n(j)} = \lim_{j\to\infty} T\psi_{n(j)} - \lim_{j\to\infty} A\psi_{n(j)} = \psi.$$

Il est clair que $T\psi = 0$, d'où $\psi \in N(T)$.Contradiction avec le fait que

$$\|\psi_n - \chi_n\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall \chi_n \in N(T).$$

D'où, on peut conclure que la suite a_n^{-1} est bornée, c'est à dire

$$a_n^{-1}\psi_n = \varphi_n + a_n^{-1}\chi_n,$$

alors , il vient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(a_n^{-1}\psi_n) &= \lim_{n\to\infty} T\varphi_n + \lim_{n\to\infty} T(a_n^{-1}\chi_n)\\ &\lim_{n\to\infty} T\varphi_n + 0 = f.\end{aligned}$$

La suite $a_n^{-1}\psi_n$ étant bornée comme produit de deux suites bornées a_n^{-1} et ψ_n. D'où l'existence d'une sous suite $a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}$ telle que la suite $A(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)})$ soit convergente vers un élément $a^{-1}\psi$ de X, ce qui implique la convergence de la sous suite $a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}$ vers le même élément $a^{-1}\psi$ de X car, on a

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)} = \lim_{k\to\infty} T(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}) + \lim_{k\to\infty} A(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}) = a^{-1}\psi \in X.$$

L'opérateur T étant continu, alors, on écrit

$$\lim_{k\to\infty} T(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)}) = T(\lim_{k\to\infty}(a_{n(k)}^{-1}\psi_{n(k)})) = T(a^{-1}\psi) = f \in T(X) = \overline{T(X)}.$$

Il en résulte

$$\overline{T(X)} = T(X).$$

Théorème 4
La suite d'ensembles des images

$$R(T),\ R(T^2), ...,\ R(T^n), ...$$

est une suite décroissante et ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts. Autrement dit, il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que,

$$... = R(T^{q+1}) = R(T^q) \subset ...,. \subset R(T^2) \subset R(T) \subset X,$$

le nombre q est appelé le nombre de Riesz de l'opérateur compact A pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$.

Démonstration

L'inclusion des ensembles $R(T^n)$ est évidente car, on a

$$\begin{aligned} \psi \in R(T^n) &\Rightarrow \psi = T^n\varphi = T^{n-1}(T\varphi) \\ &\Rightarrow \psi = T^{n-1}(\varphi_1) \\ &\Rightarrow \psi = R(T^{n-1}). \end{aligned}$$

D'où l'inclusion

$$R(T^n) \subset R(T^{n-1}). \tag{1'}$$

• Supposons qu'il n'existe pas un entier q tel que, la suite $R(T^{\ n})$ soit stationnaire c'est à dire,

$$R(T^m) \neq R(T^n), \quad \text{pour tout } m, n \in \mathbb{N}, \text{ avec } n < m.$$

En particulier, de l'inclusion des sous espaces fermés $R(T^{n+1}) \subset R(T^n)$, Il existe alors un élément $\psi_n \in R(T^n)$, avec $\| \psi_n \|= 1$ tel que,

$$\| \psi_n - \psi_{n+1} \|\geq \frac{1}{2}, \quad \text{pour tout } \psi_{n+1} \in R(T^{n+1}).$$

En général, pour toute suite $\psi_n \in R(T^n)$, on a la relation suivante

$$\| A\psi_n - A\psi_m \|=\| \psi_n - T\psi_n - \psi_m + T\psi_m \|\geq \frac{1}{2}, \ \forall \ m, n \quad \text{avec } n < m, \tag{2'}$$

car les éléments de la suite $(\psi_m - T\psi_m + T\psi_n)$ appartiennent au sous espace $R(T^{n+1})$.

En effet, on a

$$\psi_m \in R(T^m), \ T\psi_m \in R(T^{m+1}) \subset R(T^m) \ \text{ et } T\psi_n \in N(T^{n+1}),$$

et dû aux relations suivantes

$$R(T^{m+1}) \subset R(T^m) \ \subset R(T^{n+1}) \subset R(T^n).$$

La suite ψ_n étant bornée, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisir un élément ψ_n de norme égale à l'unité. En vertu de la compacité de l'opérateur A, on peut extraire de la suite $A\psi_n$ une sous suite convergente. Contradiction avec ($2'$). D'où l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a

$$R(T^{n+1}) = R(T^n).$$

Il reste à démontrer que $N(T^n) = N(T^{n-1})$.
En effet, on a

$$\begin{aligned} \psi \in R(T^{n-1}) &\Rightarrow \psi = T^{n-1}\varphi \\ &\Rightarrow T\psi = T(T^{n-1}\varphi) = T^n\varphi \in R(T^n) = R(T^{n+1}) \\ &\Rightarrow T\psi \in R(T^{n+1}) \\ &\Rightarrow \psi \in R(T^n). \end{aligned}$$

D'où, on a

$$R(T^{n-1}) \subset R(T^n)\ .$$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après ($1'$). D'où l'existence d'un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T) \subset ... \subset N(T^{p-1}) \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = N(T^{p+2}) = ...$$

où l'entier p est donné par

$$p = \min\{k \in \mathbb{N};\ \ \text{tel que } N(T^k) = N(T^{k+1})\}.$$

L'inclusion inverse est toujours vraie d'après ($1'$). D'où l'existence d'un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que,

$$... = R(T^{q+2}) = R(T^{q+1}) = R(T^q) \subset R(T^{q-1}) \subset ... \subset R(T) \subset X,$$

où l'entier q est donné par

$$q = \min\{k \in \mathbb{N};\quad \text{tel que } R(T^{k+1}) = R(T^k)\}.$$

Lemme1

Le nombre de Riesz p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riesz q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Démonstration

Supposons que les nombres de Riesz p et q soient différents soit $p \neq q$.

- *Premier cas $q < p$.*

$$\{0\} \subset N(T) \subset ... \subset N(T^q) \subset ... \subset N(T^{p-1}) \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = ... \quad (3)$$

$$... = R(T^p) = R(T^{p-1}) = ... = R(T^q) \subset R(T^{q-1}) \subset ... \subset R(T) \subset X. \quad (4)$$

Il existe alors une fonction $\varphi \in N(T^p)$ telle que $\varphi \notin N(T^{p-1})$ avec la relation suivante

$$T^{p-1}\varphi \in R(T^{p-1}) = R(T^p) = R(T^q),$$

cela veut dire qu'il existe une fonction φ_1 et une fonction φ_2 telles que

$$T^{P-1}\varphi = T^p\varphi_1 = T^q\varphi_2, \quad (5)$$

par composition avec l'opérateur T, on obtient

$$T^p\varphi = T^{p+1}\varphi_1 = T^{q+1}\varphi_2 = 0, \text{ car } \varphi \in N(T^p),$$

ce qui implique d'après la relation (3)

$$\varphi_1 \in N(T^{p+1}) = N(T^p).$$

D'où il vient

$$T^{p+1}\varphi_1 = T^p\varphi_1 = 0.$$

Il est à remarquer que la relation (5) nous donne $T^p\varphi_1 = T^{p-1}\varphi = 0$, ce qui entraîne $\varphi \in N(T^{p-1})$, contradiction avec le fait que $\varphi \notin N(T^{p-1})$.

- *Deuxième cas $p < q$.*

$$\{0\} \subset N(T) \subset ... \subset N(T^p) = ... = N(T^{q-1}) = N(T^q) = ... \quad (3')$$

$$... = R(T^{q+1}) = R(T^q) \subset R(T^{q-1}) ... \subset R(T^p) \subset ... \subset R(T) \subset X. \quad (4')$$

Il existe alors une fonction $\psi \in R(T^{q-1})$ telle que $\psi \notin R(T^q)$ avec la relation suivante

$$\psi = T^{q-1}\varphi \in R(T^{q-1}),$$

par composition avec l'opérateur T, on obtient

$$T\psi = T^q\varphi \in R(T^q) = R(T^{q+1}), \text{ car } \psi \in R(T^{q-1}),$$

cela veut dire qu'il existe une fonction φ_1 telle que

$$T\psi = T^q\varphi = T^{q+1}\varphi_1,$$

ou encore

$$T^{q+1}\varphi_1 - T^q\varphi = 0.$$

D'où il vient

$$T^q(T\varphi_1 - \varphi) = 0 \Rightarrow T(\varphi_1) - \varphi \in N(T^q) = N(T^{q-1}). \qquad (5')$$

Il est à remarquer que la relation $(5')$ nous donne

$$T^{q-1}(T\varphi_1 - \varphi) = 0 \Leftrightarrow T^q\varphi_1 = T^{q-1}\varphi = \psi,$$

ce qui entraîne $\psi \in R(T^q)$, contradiction avec le fait que $\psi \notin R(T^q)$.

Théorème 5
Les sous espaces $N(T^r)$ et $R(T^r)$ sont supplémentaires. Autrement dit

$$X = \ker T^r \oplus \operatorname{Im} T^r = N(T^r) \oplus R(T^r)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz.

Démonstration
- *Pour tout élément $\psi \in X$, on a*

$$\psi \in X \Rightarrow T^r\psi \in R(T^r) = ... = R(T^{2r}).$$

D'où l'existence d'une fonction φ_1 telle que

$$T^r\psi = T^{2r}\varphi_1 \Rightarrow T^r(\psi - T^r\varphi_1) = 0,$$

ou encore

$$(\psi - T^r\varphi_1) = \varphi_2 \in N(T^r).$$

D'où, il vient

$$\psi = \varphi_2 + T^r\varphi_1, \quad \varphi_2 \in N(T^r), \;\; T^r\varphi_1 \in R(T^r).$$

- *Pour tout élément* $\psi \in N(T^r) \cap R(T^r)$, *on a*

$$\psi \in R(T^r) \;\text{ et } \psi \in N(T^r) = N(T^{2r}).$$

D'où l'existence d'une fonction φ telle que

$$\psi = T^r\varphi \Rightarrow T^r\psi = 0 = T^{2r}\varphi,$$

ou encore

$$\varphi \in N(T^{2r}) = ... = N(T^r).$$

D'où, il vient

$$\psi = T^r\varphi = 0.$$

Lemme 2

L'opérateur $T = I - A$ *est injectif si et seulement si,* T^r *est injectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration

- Supposons que l'opérateur T est injectif, on a pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T^r\varphi_1 = T^r\varphi_2 \;&\Rightarrow T(T^{r-1}\varphi_1) = T(T^{r-1}\varphi_2) \Rightarrow T^{r-1}\varphi_1 = T^{r-1}\varphi_2 \\ &\Rightarrow T(T^{r-2}\varphi_1) = T(T^{r-2}\varphi_2) \Rightarrow T^{r-2}\varphi_1 = T^{r-2}\varphi_2 \\ &\Rightarrow ..... \Rightarrow T(T\varphi_1) = T(T\varphi_2) \Rightarrow T\varphi_1 = T\varphi_2 \\ &\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2. \end{aligned}$$

D'ou l'injectivité de l'opérateur T^t.

- Supposons que l'opérateur T^r est injectif, on a pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T\varphi_1 = T\varphi_2 \;&\Rightarrow T^{r-1}(T\varphi_1) = T^{r-1}(T\varphi_2) \Rightarrow T^r\varphi_1 = T^r\varphi_2 \\ &\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2. \end{aligned}$$

D'où l'injectivité de l'opérateur T.

Lemme 3

L'opérateur $T = I - A$ *est surjectif si et seulement si,* T^r *est surjectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$.

Démonstration

- Supposons que l'opérateur T est surjectif, on a pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\forall\psi \in X,\ \exists\varphi_1 \in X;\ \psi = T\varphi_1 \ &\Rightarrow \varphi_2 \in X;\ \varphi_1 = T\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3 \in X;\ \varphi_2 = T\varphi_3 \\ &\Rightarrow \psi = T\varphi_1 = T(T\varphi_2) = T^2\varphi_2 = T^2(T\varphi_3) \\ &\Rightarrow \psi = T\varphi_1 = T^2\varphi_2 = ... = T(T^{r-1}\varphi_r) = T^r\varphi_r \\ &\exists\varphi_r \in X;\ \psi = T^r\varphi_r.\end{aligned}$$

D'où la surjectivité de l'opérateur T^t.

- Supposons que l'opérateur T^r est surjectif, on a pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\forall\psi \in X,\ \exists\varphi_1 \in X;\ \psi = T^r\varphi_1 \ &\Rightarrow T(T^{r-1}\varphi_1) = T(\varphi_2) \ \text{ avec } \ \varphi_2 = T^{r-1}\varphi_1 \\ &\Rightarrow \forall\psi \in X,\ \exists\varphi_2 \in X;\ \psi = T\varphi_2.\end{aligned}$$

D'ou la surjectivité de l'opérateur T.

Théorème 6

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, il est surjectif, de plus l'opérateur inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ défini de X dans X est borné.

Démonstration

- Supposons que l'opérateur $T = I - A$ est injectif alors l'opérateur $T^r = (I - A)^r$ est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$, d'après le lemme 2, en particulier pour le nombre de Riesz r. D'où la surjectivité de l'opérateur $T^t = (I - A)^r$ d'après le théorème 5 ce qui implique la surjection de l'opérateur $T = (I - A)$ d'après le lemme 3.

- Supposons que l'opérateur $T = I - A$ est surjectif alors l'opérateur $T^r = (I - A)^r$ est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$, d'après le lemme 3, en particulier pour le nombre de Riesz r. D'où l'injectivité de l'opérateur $T^t = (I - A)^r$ d'après le théorème 5 ce qui implique l'injection de l'opérateur $T = (I - A)$ d'après le lemme 2.

- L'opérateur $T = (I - A)$ étant injectif alors il est surjectif, donc il est bijectif ce qui implique l'existence d'un opérateur inverse borné $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ défini de X dans X.

Théorème 7

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f \tag{6}$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 \tag{6'}$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Démonstration

• En effet, supposons que l'équation (6) admette une solution pour tout $f \in X$, cela veut dire que l'opérateur T est surjectif et le nombre de Riesz r est nul. D'où l'injectivité de l'opérateur T. Autrement dit l'équation $(6')$ admet la solution triviale $\varphi = 0$.

• Réciproquement, supposons que l'équation $(6')$ admette uniquement la solution triviale $\varphi = 0$, cela veut dire que l'opérateur T est injectif et le nombre de Riesz r est nul. D'où la surjectivité de l'opérateur T et par conséquent la bijectivité de cet opérateur. Autrement dit l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (6).

Bibliographie

[1] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila 2004.
[2] **H. WIDOM.** Lectures on integral equations, university of california 1969.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr