§4. Opérateurs Intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

Opérateur Intégral

On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy, \quad x \in G_1, \tag{1}$$

où $k(x,y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2.

Noyau d'un opérateur

La fonction mesurable $k(x,y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A.

Normes des opérateurs intégraux

Soit A un opérateur intégral défini sur $L_p(G_1)$, alors pour tout p et q conjugués $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, avec $(1 \le p, q \le \infty)$, la norme de l'opérateur A est donnée par

$$\|A\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{G_1} \left(\int_{G_2} \mid k(x,y) \mid^q dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } \ 1 < p < \infty \\ \displaystyle\int_{G_1} \operatorname*{esssup}_{y} \mid k(x,y) \mid dx, & \text{pour } \ p = 1 \\ \displaystyle\operatorname*{esssup}_{x} \int_{G_2} \mid k(x,y) \mid dy, & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $k(x,y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$.

Mostefa NADIR

Théorème 1

Soit A un opérateur intégral de norme finie

$$\parallel A \parallel_p < \infty \tag{2}$$

Alors l'opérateur intégral A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$. De plus, on a

$$\parallel A\varphi \parallel_p \leq \parallel A \parallel_p \parallel \varphi \parallel_p \tag{3}$$

Démonstration

- *Premier cas* $1 < p < \infty$

Par utilisation de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p \, dx &= \int_{G_1} \left(\int_{G_2} \mid k(x,y) \mid \mid \varphi(y) \mid dy \right)^p dx \\
&\leq \int_{G_1} \left(\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{G_2} |\varphi(y)|^P \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dx \\
&= \|\varphi\|_p^p \int_{G_2} \left(\int_{G_2} |k(x,y)|^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \\
&= \parallel A \parallel_p^p \|\varphi\|_p^p
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy$ de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$. De plus, on a

$$\left(\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\parallel A \parallel_p^p \|\varphi\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ou encore

$$\parallel A\varphi \parallel_p \leq \parallel A \parallel_p \parallel \varphi \parallel_p .$$

- *Deuxième cas* $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)| \, dx &= \int_{G_1} \left(\int_{G_2} \mid k(x,y) \mid \mid \varphi(y) \mid dy \right) dx \\
&\leq \int_{G_1} \operatorname*{esssup}_y \mid k(x,y) \mid dx \int_{G_2} \mid \varphi(y) \mid dy \\
&= \|\varphi\|_1 \int_{G_1} \operatorname*{esssup}_y \mid k(x,y) \mid dx \\
&= \|A\|_1 \|\varphi\|_1 .
\end{aligned}$$

Mostefa NADIR

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy$ de $L_1(G_2)$ dans $L_1(G_1)$. De plus, on a

$$\| A\varphi \|_1 \leq \| A \|_1 \| \varphi \|_1 .$$

- *Troisième cas* $p = \infty$

$$\begin{aligned} \underset{x}{ess\sup} \mid T\varphi(x) \mid \; &= \underset{x}{ess \sup} \mid \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy \mid \\ &\leq \underset{y}{ess\sup} \mid \varphi(y) \mid \underset{x}{ess\sup} \int_{G_2} \mid k(x,y) \mid dy \\ &= \|A\|_\infty \|\varphi\|_\infty . \end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy$ de $L_\infty(G_2)$ dans $L_\infty(G_1)$. De plus, on a

$$\| A\varphi \|_\infty \leq \| A \|_\infty \| \varphi \|_\infty .$$

Remarque 1
La norme de l'opérateur intégral A pour $p = q = 2$ est donnée par

$$\|A\|_2 = \left(\int_{G_1}\int_{G_2} \mid k(x,y) \mid^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Proposition 1
La condition $\| A \|_p < \infty$ donnée sur la norme de l'opérateur intégral A est uniquement suffisante et non nécessaire pour la continuité de cet l'opérateur.

En effet, il suffit de prendre A comme opérateur de convolution dans $L_p(\mathbb{R})$

$$A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$$

où $k(x,y)$ est un noyau de convolution $k(x,y) = k(x-y)$ avec la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid k(t) \mid dt < \infty.$$

Comme il est connu que la norme dans l'espace $L_p(G)$ est aussi donnée par

$$\|f\|_p = \sup \int_G |f(x)g(x)|\, dx, \quad g \in L_q(G), \quad \|g\|_q = 1.$$

Mostefa NADIR

Le théorème de Fubini, nous donne

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|_p \quad & \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} \mid g(x)A\varphi(x) \mid dx \\
& \leq \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} \mid g(x) \mid \left(\int_{\mathbb{R}} \mid k(x-y)\varphi(y) \mid dy \right) dx \\
& = \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} \mid g(x) \mid \left(\int_{\mathbb{R}} \mid k(y)\varphi(x-y) \mid dy \right) dx \\
& = \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} \mid k(y) \mid dy \left(\int_{\mathbb{R}} \mid g(x)\varphi(x-y) \mid dy \right) dx \\
& \leq \| g \|_q \| \varphi \|_p \sup_{\|g\|_q=1} \int_{\mathbb{R}} \mid k(y) \mid dy \\
& = \| \varphi \|_p \int_{\mathbb{R}} \mid k(y) \mid dy
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégral $A\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\varphi(y)dy$ de $L_p(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$. De plus, on a

$$\| A\varphi \|_p \leq \| A \|_1 \| \varphi \|_p .$$

Bien entendu, la condition (2) n'est pas remplie car, on a

$$\begin{aligned}
\| A \|_p^p \; & = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \\
& = \int_{\mathbb{R}} \| A \|_q^p \, dx = \infty.
\end{aligned}$$

Théorème 2
Soit A un opérateur intégral vérifiant les conditions suivantes

- *Il existe deux constantes positives $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que*

$$\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^r \, dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_1, \quad r > 0, \quad \text{pour tout } \; x \in G_1. \tag{4}$$

De plus,

$$\left(\int_{G_1} |k(x,y)|^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq C_2, \quad s > 0, \quad \text{pour tout } \; y \in G_2. \tag{5}$$

Mostefa NADIR

- *Pour tout p et q conjugués $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$, avec $(1 \leq p, q \leq \infty)$, on a*

$$p_1 \geq p, \quad p_1 \geq s, \quad \frac{p_1 - s}{p_1} \leq \frac{r}{q}. \tag{6}$$

Alors l'opérateur A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$. De plus, on a

$$\| A \| \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}}. \tag{7}$$

Démonstration

Utilisons l'inégalité de Hölder généralisée pour les valeurs p_1, q et $\dfrac{pp_1}{p_1-p}$ vérifient la relation $(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q}+\frac{p_1-p}{pp_1}=1)$ alors, on a

$$\begin{aligned}
|A\varphi(x)| &= \left| \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)dy \right| \\
&\leq \int_{G_2} |k(x,y)| \; |\varphi(y)| \, dy \\
&= \int_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right)^{\frac{1}{p_1}} \; |\varphi(y)|^{1-\frac{p}{p_1}} \; |k(x,y)|^{1-\frac{s}{p_1}} \, dy \\
&= \int_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right)^{\frac{1}{p_1}} \; |\varphi(y)|^{p(\frac{p_1-p}{pp_1})} \; |k(x,y)|^{\frac{p_1-s}{p_1}} \, dy \\
&= \int_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right)^{\frac{1}{p_1}} \; \left(|\varphi(y)|^p\right)^{\frac{p_1-p}{pp_1}} \; \left(|k(x,y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})}\right)^{\frac{1}{q}} dy
\end{aligned}$$

D'où la relation

$$|A\varphi(x)| \leq \left(\int_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right) dy \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{G_2} |\varphi(y)|^p \, dy \right)^{\frac{p_1-p}{pp_1}} \left(\int_{G_2} |k(x,y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})} \, dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En vertu de (4), avec $q(\dfrac{p_1-s}{p_1}) \geq 0$, on obtient

$$\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})} \, dy \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^{q(\frac{p_1-s}{p_1})} \, dy \right)^{\frac{1}{q}(\frac{p_1}{p_1-s})} \right)^{\frac{p_1-s}{p_1}} \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}}.$$

Mostefa NADIR

De plus, on a

$$\left(\int\limits_{G_2} |\varphi(y)|^p \, dy\right)^{\frac{p_1-p}{pp_1}} = \left(\left(\int\limits_{G_2} |\varphi(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p_1-p}{p_1}} = \|\varphi\|^{\frac{p_1-p}{p_1}}.$$

D'où, la relation

$$|A\varphi(x)| \leq \left(\int\limits_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right) dy\right)^{\frac{1}{p_1}} \|\varphi\|^{\frac{p_1-p}{p_1}} C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}}.$$

Par intégration des deux cotés, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|^{p_1} \, dx &\leq \int_{G_1} \left(\left(\int_{G_2} \left(|k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p\right) dy\right)^{\frac{1}{p_1}} \|\varphi\|^{\frac{p_1-p}{p_1}} C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}}\right)^{p_1} dx \\
&= \int_{G_1} \int_{G_2} |k(x,y)|^s \, |\varphi(y)|^p \, dy dx \, \|\varphi\|^{p_1-p} \, C_1^{p_1-s} \\
&= \|\varphi\|^{p_1-p} \, C_1^{p_1-s} \int_{G_1} |k(x,y)|^s \, dx \int_{G_2} |\varphi(y)|^p \, dy \\
&= \|\varphi\|^{p_1-p} \, C_1^{p_1-s} \, \|\varphi\|^p \int_{G_1} |k(x,y)|^s \, dx \\
&= \|\varphi\|^{p_1} \, C_1^{p_1-s} \left(\left(\int_{G_1} |k(x,y)|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s \\
&\leq C_1^{p_1-s} C_2^s \, \|\varphi\|^{p_1}.
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur A de l'espace $L_p(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$

$$\left(\int\limits_{G_1} |A\varphi(x)|^{p_1} \, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(C_1^{p_1-s} C_2^s \, \|\varphi\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}} \, \|\varphi\|.$$

Autrement dit, on a

$$\|A\varphi\|_{p_1} \leq C_1^{\frac{p_1-s}{p_1}} C_2^{\frac{s}{p_1}} \, \|\varphi\|_p,$$

Mostefa NADIR

ou encore

$$\|A\varphi\|_{p_1} \leq \|A\| \, \|\varphi\|_p \,, \quad \text{avec} \quad \|A\| \leq C_1^{\frac{p_1 - s}{p_1}} \, C_2^{\frac{s}{p_1}}.$$

Remarque 2

Le cas où $p = 1$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_1(G_2)$ dans $L_{p_1}(G_1)$ sous la condition suivante

$$\left(\int_{G_1} |k(x,y)|^{p_1} \, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq C_2, \qquad \text{pour tout} \ \ y \in G_2.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_2.$$

Bien entendu, si $p = 1$ implique que $q = \infty$ et la relation (6) donne $p_1 = s$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Remarque 3

Le cas où $p_1 = \infty$, l'opérateur A devient un opérateur continu de $L_p(G_2)$ dans $L_\infty(G_1)$ sous la condition suivante

$$q \leq r.$$

De plus, on a

$$\|A\| \leq C_1.$$

Bien entendu, si $p_1 = \infty$ implique que $\dfrac{r}{q} \geq 1$ et la relation (6) donne $\dfrac{s}{p_1} = 0$, ce qui entraîne le résultat voulu.

Proposition 2 (Opérateurs produits)

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs intégraux de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, alors l'opérateur produit $(A_1 A_2)\varphi = A_1(A_2\varphi)$ est un opérateur intégral de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$.

En effet, on a

Mostefa NADIR

$$
\begin{aligned}
(A_1A_2)\varphi(x) &= A_1(A_2\varphi) \\
&= \int_E k_1(x,z)A_2\varphi(z)dz \\
&= \int_E k_1(x,z)\left(\int_E k_2(z,y)\varphi(y)dy\right)dz \\
&= \int_E \varphi(y)dy\left(\int_E k_1(x,z)k_2(z,y)dz\right) \\
&= \int_E k_3(x,y)\varphi(y)dy,
\end{aligned}
$$

où la fonction $k_3(x,y)$ désigne le noyau de l'opérateur produit A_1A_2 donné par la relation

$$k_3(x,y) = \int_E k_1(x,z)k_2(z,y)dz.$$

Remarque 4

L'opérateur intégral produit $A^2\varphi(x) = A(A\varphi(x))$ admet un noyau $k_2(x,y)$ donné par

$$k_2(x,y) = \int k(x,z)k(z,y)dz.$$

noyaux itérés

Le noyau $k_n(x,y)$ de l'opérateur intégral produit $A^n\varphi(x) = A(A^{n-1}\varphi(x))$ est dit noyau itéré du noyau $k(x,y)$, donné par

$$k_n(x,y) = \int k(x,z)k_{n-1}(z,y)dz.$$

Mostefa NADIR

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, G. AKILOV.** Analyse fonctionnelle, éditions Mir Moscou 1981.

[2] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Laboratory of Pure and Applied Mathematics
and
Laboratory of Signals Analysis and Systems
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr

Mostefa NADIR