§12. Fonctions de Liapounov

Soit le système d'équations suivant

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où les vecteurs x et f sont donnés comme suit

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t, \quad f = (f_1, f_2, ..., f_n).$$

Lemme (Liapounov)

Soit le système d'équations (1), *supposons que*

1- Les fonctions $f_i(t, x),\ i = 1, 2, ..., n$ *soient continues pour* $t_0 \leq t < \infty$, *aussi* $\mid x \mid < \epsilon_0,\ \epsilon_0 > 0$.

2- les fonctions $f_i(t, 0) = 0,\ i = 1, 2, ..., n$.

3- Il existe une fonction $V(x)$ *dite de Liapounov, continûment différentiable, telle que*

$$\begin{cases} \bullet\ V(x) \geq 0;\ \text{et}\ V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \bullet\ \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t, x) \leq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Alors la solution nulle du système (1) *est stable.*

De plus, si on a

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t, x) \leq -W(x), \tag{3}$$

où $W(x)$ *est une fonction continue vérifiant*

$$W(x) \geq 0; \quad \text{et} \quad W(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Démonstration

partie1

Soit $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, posons

$$K_\epsilon = \{x \in R^n,\ \mid x \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \epsilon^2\},\ \text{et}\ \ V_\epsilon = \min_{x \in K_\epsilon} V(x).$$

Il aisé de voir que $V_\epsilon > 0$, le fait que la fonction $V(x)$ est continue et s'annule à l'origine, Alors on peut trouver un $\delta > 0$, tel que $\delta < \epsilon$ et on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \mid x \mid \leq \delta < \epsilon\ \Rightarrow V(x) < V_\epsilon.$$

Soit la fonction $x = \varphi(t)$ une solution du système (1), alors

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(t,x).$$

D'après (2), on remarque que la fonction $V(x)$ ne croît jamais le long d'une courbe intégrale $x = \varphi(t)$ solution du système (1) quand $t \geq t_0$.

Supposons qu' il existe une fonction $x = \psi(t),\ t \geq t_0$ où le point initial $x^0 = \psi(t_0)$ se trouve à l'intérieur de K_δ, autrement dit

$$x^0 = \psi(t_0) \in K_\delta \Rightarrow \mid x^0 \mid = \mid \psi(t_0) \mid \leq \delta, \quad t \geq t_0,$$

telle que pour $t = t_1 > t_0$ la fonction $x^1 = \psi(t_1)$ se trouve dans K_ϵ, autrement dit

$$x^1 = \psi(t_1) \in K_\epsilon \Rightarrow \mid x^1 \mid = \mid \psi(t_1) \mid = \epsilon, \quad t = t_1 > t_0.$$

Alors lorsque t croît le long de courbe $x = \psi(t)$, on a

$$V(x)_{t=t_0} = V(\psi(t_0)) < V_\epsilon \leq V(\psi(t_1) = V(x)_{t=t_1},$$

ce qui contredit le fait que la fonction $V(x)$ ne croît pas quand le temps t croît. D'où la confirmation que toutes les courbes intégrales $x = \varphi(t)$ solution du système (1) avec le point initial $x^0 = \varphi(t_0)$ pour $t = t_0$ se trouvant à l'intérieur de K_δ ne peuvent jamais atteindre K_ϵ lorsque t croît, d'où la stabilité.

partie2

Prenons un $\delta > 0$, tel que $\delta = \delta(\epsilon)$. Alors toutes les courbes intégrales $x = \varphi(t)$ avec le point initial $x^0 = \varphi(t_0)$ à l'intérieur de K_δ restent à l'intérieur de K_ϵ lorsque t croît

Exemple1

Soit le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = x^4 y, . \end{cases}$$

étudier la stabilité de la solution nulle.

Solution

Posons

$$V(x,y) = x^4 + y^4.$$

On remarque que la fonction $V(x,y)$ satisfait aux conditions de Liapounov car

- $V(x,y)$ est continûment différentiable
- $V(x,y) \geq 0$ et $V(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

De plus, on a

$$\frac{dV(x,y)}{dt} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\dot{y} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(x^4 y) = 0.$$

D'où la stabilité de la solution nulle.

Exemple2

Soit l'équation suivante

$$\dot{x} = -ax, \quad \text{avec } a > 0.$$

étudier la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Solution

Soit les fonctions

$$V(x) = x^2 \;\; \text{et} \;\; W(x) = 2ax^2.$$

Alors, on a

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} = 2x(-ax) = -2ax^2 = -W(x).$$

Les conditions du lemme étant vérifiées, alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Exemple3

Soit le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y \\ \dot{y} = x - y^3, \end{cases}$$

étudier la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Solution

Posons

$$V(x,y)=x^2+y^2 \quad \text{et} \quad W(x,y)=2(x^4+y^4).$$

On remarque que la fonction $V(x,y)$ satisfait aux conditions de Liapounov car

- $V(x,y)$ est continûment différentiable
- $V(x,y)\geq 0$ et $V(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x,y)}{dt} &= \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\dot{y}=2x(-x^3-y)+2y(x-y^3)=0 \\
&= -2(x^4+y^4)=-W(x,y)\leq 0.
\end{aligned}$$

Les conditions du lemme étant vérifiées, alors la solution nulle est asymptotiquement stable.

Exemple4

Soit le système d'équations suivant

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j, \quad i=1,2,...,n,$$

avec les conditions

$$\begin{cases} a_{ij}(t)=-a_{ji}(t) \quad \text{si} \quad i\neq j \\ a_{ii}(t)\leq 0 \quad \text{si} \quad i=j, \qquad i,j=1,2,...,n. \end{cases}$$

Etudier la stabilité et la stabilité asymptotique de la solution nulle.

Solution

Posons

$$V(x)=V(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dV(x)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i=2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_ix_j=2\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)x_i^2\leq 0.
\end{aligned}$$

D'où la stabilité de la solution nulle.

Notons que si on trouve un indice k tel que $a_{kk} < 0, \quad \forall t \geq 0$, alors la fonction

$$W(x) = -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)x_i^2,$$

assure la stabilité asymptotique de la fonction nulle.

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures Dunod Paris 1960.

[5] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.