§2. Topologie de $\mathbb{R}^n$

Opérations sur $\mathbb{R}^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de $n-$uples,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \text{où} \quad x_1, x_2, ..., x_n \quad \text{sont des nombres réels.}$$

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + ..., x_n + y_n) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n). \end{aligned}$$

Ces deux dernières opérations nous donnent une structure d'espace vectoriel pour $\mathbb{R}^n$ sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

Produit scalaire

Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de x et y, noté $\langle x, y\rangle$ ou $x.y$ le nombre réel

$$\langle x, y\rangle = x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Norme

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, la norme de x que l'on note $\|x\|$est la racine carrée non négative suivante

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1

Soient x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soient a et b deux nombres réels alors,

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
3. $\|ax\| = |a| \, \|x\|$

4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
5. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$
6. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ *(inégalité de Schwartz)*
7. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
8. $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$

Démonstration
$(1), (2), (3), (4)$ et (5) résultent immédiatement des définitions.

6) Pour tout vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0,$$

on prend les vecteurs x et y comme donnés et on traite cette expressions comme un trinôme de deuxième degré en λ, équation sous la forme

$$a\lambda^2 + b\lambda + c, \text{ avec } a = \|x\|^2, \; b = 2\langle x, y\rangle, \; c = \|y\|^2.$$

Comme ce trinôme est toujours positif, alors son déterminant $b^2 - 4ac$ est négatif, d'où

$$4\langle x, y\rangle^2 \leq 4\|x\|^2\|y\|^2.$$

En extrayant les racines carrées des deux membres, on obtient l'inégalité de Schwartz.

7) Pour tout vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

8) Si dans (7), on remplace x par $x - y$ et y par $y - z$, on obtient (8).

Distance
Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit la distance entre ces deux vecteurs par,

$$d(x, y) = \|x - y\|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 2
Pour tout vecteurs x, y et z de $\mathbb{R}^n$, on a

- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité du triangle)*
- $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$

Démonstration

En effet il est aisé de remplacer dans la relation (3) le vecteur x par $x - y$ et le réel a par -1, on obtient

$$d(x, y) = d(y, x)$$

Aussi, de la relation (8), on obtient immédiatement,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Enfin, de la relation (1), on a

$$d(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } x = y$$

Propriétés

La distance euclidienne $d(x, y)$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifie pour tout x, y et z de $\mathbb{R}^n$ les propriétés suivantes

1. $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$; et $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Boule Ouverte

On appelle boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, et que l'on note $B(a, r)$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(a, x) < r$ et on écrit

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ d(a, x) < r\}.$$

Ensemble ouvert

Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble U de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ \text{tel que } B(x,r) \subset U.$$

Exemple

Pour tout point $a \in \mathbb{R}$, on a

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R},\ d(a,x) = |a-x| < r\} =]a-r, a=r[.$$

Proposition

Toute boule ouverte $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert

Démonstration

Soit x un point de la boule $B(a,r)$, il nous faut trouver un point $s > 0$ tel que $B(x,s) \subset B(a,r)$, le fait que l'on a $d(a,x) < r$ alors $r - d(a,x) > 0$, soit $s = r - d(a,x)$, on peut montrer maintenant que $B(x,s) \subset B(a,r)$.

Alors prenons

$$\begin{aligned} y &\in B(x,s) \Rightarrow d(x,y) < s \Rightarrow d(x,y) < r - d(a,x) \\ &\Rightarrow d(a,x) + d(x,y) < r \Rightarrow d(a,y) < r. \end{aligned}$$

D'où

$$y \in B(a,r).$$

Point d'accumulation

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, un point x de $\mathbb{R}^n$ est dit point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(x,r)$ contient un point $y \neq x$ tel que $y \in A$.

Exemple

Soit l'ensemble $A = [0,1[$. le point 1 est un point d'accumulation de A car toute boule ouverte $B(1,r)$ contient un point $y \neq 1$ tel que $y \in A = [0,1[$.

Limite d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un élément $p \in \mathbb{R}^n$ est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe un entier } N \in \mathbb{N}, \ \forall\ n > N \ \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Exercices

Exercice 1
Soient x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$, avec

$$x = (3, -1, 2, 0);\ \ y = (-1, 3, 5, \frac{1}{2});\ \ z = (\frac{1}{2}, 0, -1, -1)$$

calculer

1. $2y + z$
2. $\|x\|$; $\|y\|$; $\|x + y\|$
3. $\langle x + y, 2z \rangle$
4. $|\langle x, z \rangle|$; $\|x\| \, \|z\|$

Exercice 2
Démontrer la relation suivante

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Exercice 3
Démontrer que pour tout nombres réels x_1, x_2, y_1et y_2, on a la relation

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 4
Soit A un ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. Montrer que son complémentaire est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5
Montrer que

1. La réunion d'une famille de sous ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble ouvert.

2. L'intersection finie d'une famille de sous ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous ensemble fermé

Exercice 6

Montrer que si a est un point d'accumulation d'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, alors il est limite d'une suite d'éléments de $A - \{a\}$.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr