§6. Méthode du paramètre
équations de Clairaut et équations de Lagrange

La méthode du paramètre est une méthode destinée à résoudre les équations différentielles par rapport à leurs fonctions et non par rapport à leurs dérivées.

Il est à noter que toute équation différentielle de la forme

$$F(t, x, \dot{x}) = 0,$$

peut être mise sous la forme normale ou classique

$$\dot{x} = f(t, x),$$

ou en fonction de la variable indépendante

$$t = g(x, \dot{x}),$$

ou encore par rapport à la fonction $x(t)$ et non par rapport à la dérivée $\dot{x}(t)$

$$x = h(t, \dot{x}). \tag{1}$$

1 Méthode du paramètre

Pour la résolution de l'équation différentielle (1), par la méthode du paramètre, on procède de la façon suivante

• Introduisons le changement de variable suivant

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = p \quad \Leftrightarrow \quad dx = pdt,$$

afin de rendre l'équation (1) sous la forme

$$x = h(t, p) \tag{2}$$

• Prenons la différentielle totale des deux membres de l'équation (2), on obtient

$$dx = \frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial p}dp \tag{3}$$

• Introduisons la valeur de $dx = pdt$ dans l'équation (3) pour avoir une équation à variables séparables de la forme

$$M(t,p)dt + N(t,p)dp = 0.$$

La solution de cette équation à variables séparables est donnée sous la forme paramétrique $t = \varphi(p)$ vérifiant l'équation (2), on écrit

$$x = h(\varphi(p), p).$$

Exemple 1

Résoudre par la méthode du paramètre l'équation différentielle suivante

$$x = 2t + \frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}^2.$$

Solution

Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation donnée, il vient

$$x = 2t + \frac{1}{3}p^3 - p^2, \tag{4}$$

la différentielle totale des deux membres de l'équation (4) nous donne

$$dx = 2dt + (p^2 - 2p)dp.$$

Introduisons l'expression $dx = pdt$, dans cette équation, on obtient une équation à variables séparables de la forme

$$(p-2)dt = (p^2 - 2p)dp. \tag{5}$$

Divisons les deux membres de l'équation (5) par $(p-2)$ avec $p \neq 2$, on obtient

$$dt = pdp.$$

D'où l'intégration des deux membres de l'équation obtenue, nous donne la solution

$$2t + C = p^2. \tag{6}$$

Il est à remarquer que la division de l'équation différentielle (5) par l'expression $(p-2)$ nous fait perdre la solution $p = 2$. D'où la solution générale de l'équation (5) est donnée par

$$p = \sqrt{2t + C}, \quad \text{avec} \quad t \geq -\frac{C}{2}; \quad p = 2.$$

Portons l'expression de la solution (6) dans l'équation (4), on obtient une solution sous forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= p^2 - C + \frac{1}{3}p^3 - p^2, \\ &= \frac{1}{3}p^3 - C, \end{aligned}$$

ou encore en fonction de la variable indépendante t

$$\begin{aligned} x &= 2t + \frac{1}{3}\sqrt{(2t+C)^3} - 2t - C, \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(2t+C)^3} - C. \end{aligned}$$

Portons la solution $p = 2$ dans l'équation (4), on obtient une autre solution

$$x = 2t - \frac{4}{3}.$$

Tangente de deux fonctions

Deux fonctions $x_1 = \varphi_1(t)$ et $x_2 = \varphi_2(t)$ admettent la même tangente en un point t_0 doivent vérifier les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) &= \varphi_2(t_0), \\ \varphi_1'(t_0) &= \varphi_2'(t_0). \end{aligned}$$

Solution singulière

On appelle solution singulière de l'équation différentielle

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{7}$$

toute fonction $x = \varphi(t)$ solution de l'équation (7) telle que

- Chaque point $(t_0, \varphi(t_0))$ de la solution $x = \varphi(t)$ passe une solution particulière de la solution générale, différente de la solution $x = \varphi(t)$ au voisinage de ce point et admettant la même tangente en ce point.

- Une solution singulière $x = \varphi(t)$ de l'équation (7) vérifie toujours les équations paramétriques suivantes

$$F(t, x, p) = 0, \quad \frac{\partial F(t, x, p)}{\partial p} = 0, \quad \text{avec} \quad \dot{x} = p.$$

Exemple 2

Résoudre par la méthode du paramètre et chercher une solution singulière si elle existe de l'équation suivante

$$x = 2t + \dot{x} - \ln \dot{x}^2.$$

Solution

Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation donnée, on obtient

$$x = 2t + p - \ln p^2, \tag{8}$$

la différentielle totale des deux membres de l'équation (8) donne

$$dx = 2dt + (1 - \frac{2}{p})dp.$$

Introduisons la valeur $dx = pdt$, dans cette équation, on obtient une équation à variables séparables de la forme

$$(p-2)dt = (\frac{p-2}{p})dp. \tag{9}$$

Divisons les deux membres de l'équation (9) par $(p-2)$ avec $p \neq 2$, on aura

$$dt = \frac{1}{p}dp,$$

l'intégration des deux membres de l'équation obtenue, nous donne la solution

$$p = C \exp t. \tag{10}$$

La division de l'équation différentielle (9) par l'expression $(p-2)$ nous fait perdre la solution $p = 2$. D'où la solution générale de l'équation (9) est donnée par

$$p = C \exp t; \quad p = 2.$$

Portons l'expression de la solution (10) dans l'équation (8), on trouve la solution $x = \varphi(t)$ en fonction de la variable indépendante t

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = 2t + C \exp t - 2\ln(C \exp t), \\ &= C \exp t - 2\ln C. \end{aligned}$$

Portons la solution $p = 2$ dans l'équation (8), on obtient une autre solution $x = \psi(t)$

$$x = \psi(t) = 2t + 2 - 2\ln 2.$$

Il est connu que si la solution singulière existe, elle doit satisfaire aux conditions suivantes

$$F(t,x,p) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F(t,x,p)}{\partial p} = 0,$$

ou encore, plus précisément, solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2t - p + \ln p^2 = 0, \\ -1 + \dfrac{2}{p} = 0. \end{array} \right. \tag{11}$$

Le système (11) admet comme solutions

$$p = 2; \quad \text{et} \qquad x = \psi(t) = 2t + 2 - 2\ln 2.$$

• Vérifions que cette solution $\psi(t)$ est singulière c'est à dire, il existe d'autres solutions qui lui sont tangentes en chaque points. Autrement dit, Pour tout point $(t_0, \psi(t_0)$ passe une solution $\varphi(t)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t_0) = \psi(t_0), \\ \varphi'(t_0) = \psi'(t_0). \end{array} \right. \tag{12}$$

Réécrivons la première équation du système (12)

$$C \exp t_0 - 2\ln C = 2t_0 + 2 - 2\ln 2, \tag{13}$$

égalons les coefficients de cette équation, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} C \exp t_0 = 2, \\ -2\ln C = 2t_0 - 2\ln 2. \end{array} \right.$$

D'où, on tire la valeur de la constante C

$$C = 2\exp(-t_0). \tag{14}$$

Portons l'expression (14) dans l'équation (13), on aura l'égalité

$$2 + 2t_0 - 2\ln 2 = 2t_0 + 2 - 2\ln 2.$$

De plus, réécrivons la deuxième équation du système (12)

$$\varphi'(t_0) = C \exp t_0 = 2 = \psi'(t_0).$$

Notons que cette égalité est valable pour tous les t_0. D'où pour chaque t_0 il existe une fonction $\varphi(t_0)$ de la solution générale qui est tangente à la solution singulière $\psi(t_0)$ en ce point, notamment la solution dont la constante C est donnée par la relation (14).

2 Equations de Clairaut

On appelle équation de Clairaut toute équation de la forme

$$x = t\dot{x} + f(\dot{x}). \tag{15}$$

Remarque 1

L'équation de Clairaut est une équation du premier degré en t et du premier degré en x.

Solution de l'équation de Clairaut

Pour la résolution de l'équation (15), on utilise la méthode du paramètre
.

• Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation différentielle (15), il vient

$$x = tp + f(p). \tag{16}$$

• Dérivons les deux membres de l'équation (16), on aura

$$dx = pdt + tdp + f'(p)dp. \tag{17}$$

• Remplaçons la valeur $dx = pdt$ dans l'équation (17), on obtient une équation différentielle de la forme

$$pdt = pdt + tdp + f'(p)dp,$$

ou encore

$$(t + f'(p))dp = 0.$$

Deux solutions sont possibles pour cette équation, la première provient de la relation

$$dp = 0,$$

ce qui donne

$$p = C.$$

D'où l'équation (16) prend la forme

$$x = Ct + f(C).$$

La deuxième solution provient de la relation

$$t + f'(p) = 0,$$

ce qui donne

$$t = -f'(p),$$

ou encore

$$p = \varphi(t)$$

D'où l'équation (16) prend une forme en fonction de p

$$x = -pf'(p) + f(p),$$

ou encore une autre forme en fonction de t

$$x = t\varphi(t) + f(\varphi(t)).$$

Exemple 1

Résoudre l'équation de Clairaut suivante

$$x = t\dot{x} - 3\dot{x}^3 \tag{18}$$

Solution

Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation (18), on aura

$$x = tp - 3p^3. \tag{19}$$

Dérivons les deux membres de l'équation (19), on obtient

$$dx = pdt + tdp - 9p^2dp. \tag{20}$$

Remplaçons la valeur $dx = pdt$ dans l'équation (20), on obtient une équation différentielle de la forme

$$pdt = pdt + tdp - 9p^2dp = 0,$$

ou encore

$$(t - 9p^2)dp = 0.$$

Deux solutions sont possible pour cette équation, la première provient de la relation

$$dp = 0 \Rightarrow \; p = C,$$

ce qui donne

$$p = C.$$

D'où l'équation (19) prend la forme d'une famille de droites

$$x = Ct - 3C^3.$$

La deuxième solution provenant de l'équation

$$t - 9p^2 = 0,$$

ce qui donne

$$t = 9p^2,$$

ou encore

$$p = \frac{\sqrt{t}}{3}.$$

D'où la solution de l'équation (19), prend une forme en fonction de p

$$x = 9p^3 - 3p^3 = 6p^3,$$

ou encore une autre forme en fonction de t

$$x = \frac{\sqrt{t}}{3}(t - \frac{t}{3}) = \frac{2t\sqrt{t}}{9}.$$

3 Equations de Lagrange

On appelle équation de Lagrange toute généralisation de l'équation de Clairaut dont le coefficient de la variable indépendante t est une fonction quelconque $f(\dot{x})$ de la fonction dérivée $\dot{x}$ au lieu d'être $\dot{x}$ tout court. Autrement dit une équation de la forme

$$x = tf(\dot{x}) + g(\dot{x}). \tag{21}$$

Remarque 2
L'équation de Lagrange n'est pas forcement linéaire.

Solution de l'équation de Lagrange
Pour la résolution de l'équation (21), on utilise la méthode du paramètre
.

• Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation (21), il vient

$$x = tf(p) + g(p). \tag{22}$$

• Dérivons les deux membres de l'équation (22), on aura

$$dx = f(p)dt + tf'(p)dp + g'(p)dp. \tag{23}$$

• Remplaçons la valeur $dx = pdt$ dans l'équation (23), on obtient une équation différentielle de la forme

$$pdt = f(p)dt + tf'(p)dp + g'(p)dp,$$

ou encore

$$(f(p) - p)dt + (tf'(p) + g'(p))dp = 0. \tag{24}$$

Divisons les deux membres de l'équation (24) par dp, on obtient la fonction $\frac{dt}{dp}$ dérivée de t par rapport à p, dans le premier terme du premier membre de l'équation, c'est à dire

$$(f(p) - p)\frac{dt}{dp} + (tf'(p) + g'(p)) = 0,$$

ou encore une équation linéaire de la forme

$$A(p)t' + B(p)t + C(p) = 0.$$

Intégrons cette équation linéaire, on obtient la solution

$$t = \varphi(p).$$

D'où, on tire la fonction $x(t)$ de la relation

$$dx = pdt = p\varphi'(p)dp,$$

qui donne la solution finale de l'équation (21) en fonction de p sous la forme

$$x = \int p\varphi'(p)dp.$$

Exemple 1
Résoudre l'équation de Lagrange suivante

$$x = -t\dot{x} - \dot{x}^2 \qquad (25)$$

Solution
Introduisons le changement de variable $\dot{x} = p$ dans l'équation (25), on aura

$$x = -tp - p^2. \qquad (26)$$

Dérivons les deux membres de l'équation (26), on obtient

$$dx = -pdt - tdp - 2pdp, \qquad (27)$$

remplaçons la valeur $dx = pdt$ dans l'équation (27), on obtient une équation différentielle de la forme

$$pdt = -pdt - tdp - 2pdp = 0,$$

ou encore

$$2pdt + tdp + 2pdp = 0. \qquad (28)$$

Divisons les deux membres de l'équation (28) par dp, on obtient la fonction $\frac{dt}{dp}$ dérivée de t par rapport à p, dans le premier terme du premier membre de l'équation, c'est à dire

$$2p\frac{dt}{dp} + t + 2p = 0. \qquad (29)$$

Il est à remarquer que l'équation (29) est une équation différentielle linéaire de la fonction t et de la variable indépendante p

$$t' + \frac{1}{2p}t = -1, \quad \text{avec } p \neq 0.$$

La solution de l'équation homogène

$$t' + \frac{1}{2p}t = 0,$$

est donnée par

$$t = \frac{C}{\sqrt{p}}; \quad \text{avec} \quad p > 0,$$

ce qui implique par la suite la donnée de la solution générale de l'équation (29)

$$t = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{\sqrt{p}}.$$

La fonction $x(t)$ cherchée dans l'équation (26) est déterminée de la façon suivante

$$\begin{aligned} x &= -tp - p^2 \\ &= \frac{2}{3}p^2 - C\sqrt{p} - p^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$x = -\frac{1}{3}p^2 - C\sqrt{p}.$$

§6. Exercices sur la méthode du paramètre équations de Clairaut et équations de Lagrange

Intégrer les équations différentielles suivantes par la méthode du paramètre

1) $x = t\dot{x} - 2\dot{x}^2.$

2) $x = t\dot{x} + (1 + \dot{x}).$

3) $x = t\dot{x} - \ln \dot{x}.$

4) $x = t\dot{x} - \sin \dot{x}.$

5) $x = t\dot{x} + \sqrt{\dot{x}}$

6) $x = t\dot{x}^2.$

7) $x = \dfrac{t}{\dot{x}}$

8) $x = t\dot{x}(\dot{x} - 2).$

9) $x = -t\dot{x} + 4\sqrt{\dot{x}}.$

10) $x = -t\dot{x} + \dot{x}^3$

§6. Réponses de la méthode du paramètre équations de Clairaut et équations de Lagrange

1) $x = Ct - 2C;\quad 8x = t^2.$

2) $x = C(t+1) + 1.$

3) $x = Ct - \ln C;\quad x = \ln t + 1.$

4) $x = Ct - \sin C;\quad x = t\arccos t - \sin(\arccos t).$

5) $x = Ct + \sqrt{C};\quad x = \dfrac{3}{4t}.$

6) $x = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2};\quad p = 0;\quad p = 1.$

7) $x = \dfrac{C}{\sqrt{p^2-1}};\quad p = -1;\quad p = 1.$

8) $t^3 = \dfrac{C}{p^2(p-3)^4};\ p = 0;\quad p = 3.$

9) $t\sqrt{p} = \ln p + C;\quad x = \sqrt{p}(4 - \ln p - C);\quad x = 0.$

10) $x = -C\sqrt{p} + \frac{2}{5}p^3;\ p = 0.$

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **J. QUINET.** Cours élémentaires de mathématiques supérieures Dunod Paris 1960.

[5] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.