Equations de la chaleur

Méthode de séparation de variables (Méthode de Fourier)

I. **Problème homogène avec condition initiale**

$$
(P_1) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a \neq 0. & (1.1) \\[2ex] u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (1.2) \\[2ex] u(0,x) = \varphi(x). & (1.3) \end{cases}
$$

L'équation (1.1) du problème (P_1) est une équation du type parabolique, appelée équation de la chaleur pour une fonction $u(t,x)$ de deux variables indépendantes.

Pour résoudre le problème (P_1), on doit chercher une solution particulière non identiquement nulle pour l'équation (1.1) satisfaisant aux conditions (1.2) et (1.3) sous la forme d'un produit de deux fonctions l'une dépend uniquement de t que l'on note $T(t)$ et l'autre dépend uniquement de x notée $X(x)$. Autrement dit, la solution particulière $u(t,x)$ doit être donnée sous la forme

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1.4}$$

Après substitution de la solution particulière $u(t,x)$ dans l'équation (1.1), on obtient

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.5}$$

Il est à remarquer que le premier membre de l'équation (1.5) dépend uniquement de la variable t et le second membre dépend uniquement de la variable x, ce qui implique que l'égalité (1.5) ne peut avoir lieu que si les deux membres ne dépendent ni de la variable t ni de la variable x. Autrement dit, les deux membres sont égaux à une constante que l'on note λ.

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

1. *Premier cas* $\lambda > 0$.

Prenons $\lambda = \mu^2$
Pour cette valeur de $\lambda = \mu^2$, on a l'équation suivante

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu^2.$$

D'où il vient

$$\dot{T}(t) - a^2\mu^2 T(t) = 0, \tag{1.6}$$

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0. \tag{1.7}$$

Ces équations différentielles (1.6) et (1.7) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = Ae^{a^2\mu^2 t}, \tag{1.8}$$

$$X(x) = Be^{\mu x} + Ce^{-\mu x}, \tag{1.9}$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = Ae^{a^2\mu^2 t}\left(Be^{\mu x} + Ce^{-\mu x}\right).$$

Cherchons maintenant les constantes B et C de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \qquad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.9), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} B \times 1 + C \times 1 = 0, \\ Be^{\mu l} + Ce^{-\mu l} = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $B = -C$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$B\left(e^{\mu l} - e^{-\mu l}\right) = 0.$$

D'où $B = C = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

2. *Deuxième cas* $\lambda = 0$.

Pour cette valeur de $\lambda = 0$, on a l'équation suivante

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

D'où il vient

$$\dot{T}(t) = 0, \tag{1.10}$$

$$X''(x) = 0. \tag{1.11}$$

Ces équations différentielles (1.10) et (1.11) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = A, \tag{1.12}$$

$$X(x) = Bx + C, \tag{1.13}$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = A\,(Bx + C)\,.$$

Cherchons maintenant les constantes B et C de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \qquad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.13), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} B \times 0 + C = 0, \\ Bl + C = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $C = 0$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$Bl = 0.$$

D'où $B = C = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

3. *Troisième cas* $\lambda < 0$.

Prenons $\lambda = -\mu^2$
Pour cette valeur de $\lambda = -\mu^2$, on a l'équation suivante

$$\frac{\dot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2.$$

D'où il vient

$$\dot{T}(t) + a^2\mu^2 T(t) = 0, \tag{1.14}$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0. \tag{1.15}$$

Ces équations différentielles (1.14) et (1.15) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = Ae^{-a^2\mu^2 t}, \tag{1.16}$$

$$X(x) = B\cos\mu x + C\sin\mu x, \tag{1.17}$$

où A, B et C sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = Ae^{-\left(a^2\mu^2\right)t}\left(B\cos\mu x + C\sin\mu x\right).$$

Cherchons maintenant les constantes B et C de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \qquad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.17), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} B \times 1 + C \times 0 = 0, \\ B\cos\mu l + C\sin\mu l = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $B = 0$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$C\sin\mu l = 0,$$

avec $C \neq 0$ sinon, on aura $X(x) = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. D'où la relation

$$\sin \mu l = 0,$$

ou encore

$$\mu l = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.18}$$

Ce qui donne la fonction $X(x)$ sous la forme

$$X(x) = C \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{1.19}$$

Remarque 1

Dans l'expression (1.19), on ne peut pas donner la valeur $n = 0$ car dans ce cas la fonction $X(x)$ devient nulle et par la suite la solution particulière $u(t,x)$ sera nulle aussi.

Pour les mêmes valeurs de μ, l'expression (1.16) devient

$$T(t) = Ae^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.20}$$

On remarque que pour chaque valeur de n, on obtient une valeur pour μ, ce qui nous force d'écrire la solution dans l'expression (1.4) vérifiant les conditions (1.2) sous la forme

$$u_n(t,x) = A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{1.21}$$

Remarque 2

Pour chaque valeur de n, on a une valeur de μ et par conséquent une valeur A notée A_n. Bien entendu, la constante C est incluse dans cette valeur.

L'équation (1.1) étant linéaire et homogène, alors la somme des solutions de l'équation (1.1) est aussi une solution de cette équation, ce qui donne la représentation de la solution $u(t,x)$ sous forme d'une série

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x), \tag{1.22}$$

ou encore

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{1.23}$$

Il faut noter que la série (1.22) est solution de l'équation (1.1) que si cette dernière est convergente ainsi que les séries obtenues après dérivation terme à terme par rapport à x et à t.

De plus, la série (1.22) doit satisfaire aux conditions aux limites (1.3). D'où il faut choisir les coefficients A_n d'une façon adéquate.

Posons $t=0$ dans la série (1.23), on obtient

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x), \tag{1.24}$$

avec le développement de la fonction $\varphi(x)$ en sinus est donné par

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{1.25}$$

où les coefficients φ_n sont donnés par

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

La convergence de la série (1.23) et le développement de la fonction $\varphi(x)$ en série de Fourier sur l'intervalle $]0,l[$ nous force par identification (1.24) et (1.25) à donner les coefficients A_n sous la forme

$$A_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{1.26}$$

Remarque 3
Il est à noter que la solution du problème est donnée par la formule

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{1.27}$$

ou encore

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Exemple 1
Trouver la solution du problème (P_1) suivant

$$(P_1) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,3) = 0, \\ \\ u(0,x) = \sin x. \end{cases}$$

Solution
La solution $u(t,x)$ du problème (P_1) pour $a = \sqrt{2}$ et $l = 3$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\sqrt{2}n\pi}{3}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{3} x, \end{aligned}$$

avec la condition initiale $u(0,x) = \sin x$ au point $t = 0$, c'est à dire

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{3} x = \sin x. \tag{1.28}$$

Utilisons le développement de la fonction $\varphi(x) = \sin x$ en série de Fourier suivant les fonctions $\sin \dfrac{n\pi}{3} x$, il vient

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{3} x, \tag{1.29}$$

par l'identification des deux équations(1.28) et (1.29) , on obtient l'égalité des coefficients $A_n = \varphi_n$ données par

$$\begin{aligned} A_n = \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^3 \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \sin x \sin \frac{n\pi}{3} x dx \\ &= 2(-1)^{n+1} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - 9} \sin 3. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la solution $u(t,x)$ sous la forme

$$u(t,x) = 2\sin 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - 9} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}n\pi}{3}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{3} x$$

II. **Problème nonhomogène sans condition initiale**

$$(P_2) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \;\; a \neq 0 & (2.1) \\[2ex] u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (2.2) \\[2ex] u(0,x) = 0. & (2.3) \end{cases}$$

Résolution du problème (P_2)

Pour résoudre le problème (P_2), on doit chercher une solution particulière $u(t,x)$ non identiquement nulle pour l'équation (2.1) satisfaisant aux conditions (2.2) et (2.3) sous la forme d'une série

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

ou encore suivant les fonctions propres $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{l}$ du problème de Sturm Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0,$$

la fonction $u(t,x)$ prend la forme suivante

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{2.4}$$

Portons (2.4) dans l'équation (2.1), il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dot{T}_n(t) + (\frac{an\pi}{l})^2 T_n(t) \Big) \sin \frac{n\pi}{l} x = f(t,x). \tag{2.5}$$

Développons la fonction $f(t,x)$ dans l'intervalle $]0,l[$ en série de Fourier suivant les fonctions en sinus, on obtient

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{2.6}$$

comparons (2.5) et (2.6), on obtient les équations différentielles suivantes

$$\dot{T}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \tag{2.7}$$

où les coefficients $f_n\,(t)$ sont calculés comme suit

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx, \qquad n = 1, 2, ..., ..$$

Après la Résolution des équations différentielles ordinaires (2.7) avec les conditions initiales nulles

$$T_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, ... \quad . \tag{2.8}$$

La solution $u(t, x)$ sera donnée par

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Exemple 2
Trouver la solution du problème (P_2) suivant

$$(P_2) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, \\[2ex] u(t,0) = 0, \quad u(t,2) = 0, \\[2ex] u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Solution
La solution $u(t, x)$ du problème (P_2) pour $l = 2$ et $a = 3$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{2}x, \end{aligned}$$

où les fonctions $T_n(t)$ sont solutions des équations différentielles suivantes

$$\dot{T}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),$$

ou encore

$$\dot{T}_n(t) + \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),$$

avec les fonctions $f_n(t)$ sont calculées comme suit

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2}{2}\int_0^2 xt\sin\frac{n\pi}{2}xdx \\
& \quad t\int_0^2 x\sin\frac{n\pi}{2}xdx \\
&= \left(\frac{(-1)^{n+1}4}{n\pi}\right)t.
\end{aligned}$$

Notons que l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec les conditions initiales $T_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$.

$$\dot{T}_n(t) + \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = \left(\frac{(-1)^{n+1}4}{n\pi}\right)t, \tag{2.10}$$

admet comme solution l'expression suivante

$$T_n(t) = -\frac{(-1)^n 64}{81(n\pi)^5}e^{-\left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 t} - \frac{(-1)^n 16}{9(n\pi)^3}t + \frac{(-1)^n 64}{81(n\pi)^5}. \tag{2.11}$$

D'où la solution $u(t,x)$ donnée par

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{(-1)^n 64}{81(n\pi)^5}e^{-\left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 t} - \frac{(-1)^n 16}{9(n\pi)^3}t + \frac{(-1)^n 64}{81(n\pi)^5}\right)\sin\frac{n\pi}{2}x$$

III. **Problème nonhomogène avec condition initiale**

$$
(P_3) \quad = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (3.1) \\[2ex] u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.2) \\[2ex] u(0,x) = \varphi(x). & (3.3) \end{cases}
$$

Pour résoudre le problème (P_3), on doit chercher une solution particulière $u(t,x)$ non identiquement nulle pour l'équation (3.1) satisfaisant aux conditions (3.2) et (3.3) sous la forme d'une somme

$$
u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{3.4}
$$

où $v(t,x)$ est la solution du problème (P_1)

$$
(P_1) \quad = \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad a \neq 0. & (3.5) \\[2ex] v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.6) \\[2ex] v(0,x) = \varphi(x), & (3.7) \end{cases}
$$

et $w(t,x)$ est la solution du problème (P_2)

$$
(P_2) \quad = \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (3.8) \\[2ex] w(t,0) = 0, \quad w(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.9) \\[2ex] w(0,x) = 0. & (3.10) \end{cases}
$$

Notons que la solution $u(t,x)$ du problème (P_3) s'obtienne comme la somme des deux solutions des problèmes (P_1) et (P_2)

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{3.11}
$$

ou encore

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} + T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

où les coefficients A_n sont déterminés par l'expression (1.26) et les fonctions$T_n(t)$ sont déterminées par les solutions des équations différentielles ordinaires (2.7) satisfaisants aux conditions (2.8).

Exemple 3
Trouver la solution du problème (P_3) suivant

$$(P_3) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -1, \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = x. \end{cases}$$

Solution
La solution $u(t,x)$ du problème (P_3) pour $l = 1$ et $a = 2$ est donnée par la somme

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

1. $v(t,x)$ est solution du problème (P_1) avec $a = 2,\ l = 1$ et $\varphi(x) = x$

$$(P_1) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,1) = 0, \\ v(0,x) = x. \end{cases}$$

C'est à dire $v(t,x)$ est s'écrit comme

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ & \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(2n\pi)^2 t} \sin n\pi x \end{aligned}$$

avec la condition initiale $v(0,x)=x$, autrement dit

$$v(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = x, \tag{3.12}$$

par le développement de la fonction $\varphi(x)=x$ en série de Fourier suivant les fonctions $\sin n\pi x$, il vient

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n\pi x, \tag{3.13}$$

par comparaison des deux équations (3.12) et (3.13) , on obtient l'égalité des coefficients $A_n=\varphi_n$ données par

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^1 \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx \\ &= 2\int_0^1 x\sin n\pi x dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}. \end{aligned}$$

D'où la solution $v(t,x)$ est donnée par

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{-(2n\pi)^2t}\sin n\pi x \tag{3.14}$$

2. $w(t,x)$ est solution du problème (P_2) avec $a=2,\ l=1$ et $f(t,x)=-1$

$$(P_2) \ = \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-1, \\ w(t,0)=0, \quad w(t,1)=0, \\ w(0,x)=0. \end{cases}$$

C'est à dire $w(t,x)$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ & \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin n\pi x \end{aligned}$$

Remplaçons l'expression de la fonction $w(t,x)$ dans le problème (P_2) et appliquons les relations (2.5) et (2.6) , on obtient

$$\begin{aligned}\dot{T}_n(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) &= f_n(t)\\ \dot{T}_n(t)+(2n\pi)^2 T_n(t) &= f_n(t)\end{aligned}$$

où les fonctions $f_n(t)$ sont calculées comme suit

$$\begin{aligned}f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx\\ &= -2\int_0^1 \sin n\pi x dx\\ &= \frac{2(-1)^n-2}{n\pi}.\end{aligned}$$

Notons que l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\dot{T}_n(t)+(2n\pi)^2 T_n(t)=\frac{2(-1)^n-2}{n\pi}., \tag{3.15}$$

admet comme solution l'expression suivante

$$T_n(t)=-\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}e^{-(2n\pi)^2t}+\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}. \tag{3.16}$$

D'où la solution $w(t,x)$ est donnée par

$$W(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}e^{-(2n\pi)^2t}+\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}\right)\sin n\pi x. \tag{3.17}$$

Finalement, on obtient la solution $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)$ du problème (P_3)

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}-\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}\right)e^{-(2n\pi)^2t}+\frac{2(-1)^n-2}{4(n\pi)^3}\right)\sin n\pi x.$$

IV. **Problème nonhomogène avec condition initiale et conditions aux limites**

$$
(P_4) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (4.1) \\[2ex] u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t), \quad l > 0, & (4.2) \\[2ex] u(0,x) = \varphi(x). & (4.3) \end{cases}
$$

Pour résoudre le problème (P_4), on doit chercher une solution particulière $u(t,x)$ non identiquement nulle pour l'équation (4.1) satisfaisant aux conditions (4.2) et (4.3) sous la forme d'une somme

$$
u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{4.4}
$$

où la fonction $w(t,x)$ est une fonction auxiliaire vérifie les conditions aux limites données

$$
w(t,x) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \tag{4.5}
$$

et la fonction $v(t,x)$ est une solution du problème (P_3) suivant

$$
(P_3) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t,x) - \left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad a \neq 0. & (4.6) \\[2ex] v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = 0, \quad l > 0. & (4.7) \\[2ex] v(0,x) = \varphi(x) - w(0,x). & (4.8) \end{cases}
$$

Remarque 1

On réussit parfois à obtenir une fonction $u(t,x)$ satisfaisant à l'équation non homogène (4.1) du problème (P_4) et aux conditions aux limites et initiale données (4.2) et (4.3). La solution $u(t,x)$ du problème (P_4) prend la forme $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ en constatant que la fonction $v(t,x)$ vérifie l'équation non homogène (4.6) du problème (P_3) et les conditions aux limites et initiale données (4.7) et (4.8) et la fonction $w(t,x)$ est donnée par (4.5).

Remarque 2

La solution $v(t,x)$ du problème (P_3) prend la forme

$$v(t,x) = v_1(t,x) + w_1(t,x)$$

où la fonction $v_1(t,x)$ est solution du problème homogène (P_1) et la fonction $w_1(t,x)$ est solution du problème non homogène (P_2) ce qui donne par le suite la solution $u(t,x)$ du problème (P_4) comme somme de trois solutions

$$u(t,x) = v_1(t,x) + w_1(t,x) + w(t,x).$$

Exemple 4

Trouver la solution du problème (P_4) suivant

$$(P_4) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = |x|\, t, \\ u(t,0) = 2t, \quad u(t,4) = \sin t, \\ u(0,x) = x^2. \end{cases}$$

Solution

La solution $u(t,x)$ du problème (P_4) pour $l = 4$ et $a = \sqrt{3}$ est donnée par la somme

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

1. $w(t,x)$ est une fonction auxiliaire vérifie les conditions aux limites données

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \\ &= 2t + \frac{x}{4}(\sin t - 2t) \end{aligned}$$

2. $v(t,x)$ est solution du problème (P_3) avec $a = \sqrt{3},\; l = 4$ et $\varphi(x) = x^2$

$$(P_1) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - 3\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = |x|\, t, \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,4) = 0, \\ v(0,x) = x^2. \end{cases}$$

Encore la solution $v(t,x)$ s'écrit comme la somme de deux fonctions $v(t,x) = v_1(t,x) + w_1(t,x)$ où la fonction $v_1(t,x)$ est solution du problème homogène (P_1) et la fonction $w_1(t,x)$ est solution du problème non homogène (P_2).

Bibliographie

[1] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[2] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 Algeria
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr