Equations des ondes

Méthode de séparation de variables (Méthode de Fourier)

1. **Problème homogène avec conditions initiales**

$$(P_1) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a \neq 0. & (1.1) \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (1.2) \\ u(0,x) = \varphi_1(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi_2(x). & (1.3) \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on doit chercher une solution particulière non identiquement nulle pour l'équation (1.1) satisfaisant aux conditions (1.2) et (1.3) sous la forme d'un produit de deux fonctions l'une dépend uniquement de t que l'on note $T(t)$ et l'autre dépend uniquement de x notée $X(x)$. Autrement dit, la solution particulière $u(t,x)$ doit être donnée sous la forme

$$u(t,x) = T(t).X(x). \tag{1.4}$$

Après substitution de la solution particulière $u(t,x)$ dans l'équation (1.1), on obtient

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.5}$$

Il est à remarquer que le premier membre de l'équation (1.5) dépend uniquement de la variable t et le second membre dépend uniquement de la variable x, ce qui implique que l'égalité (1.5) ne peut avoir lieu que si les deux membres ne dépendent ni de la variable t ni de la variable x. Autrement dit, les deux membres sont égaux à une constante que l'on note λ.

1. *Premier cas* $\lambda > 0$.

Prenons $\lambda = \mu^2$

Pour cette valeur de $\lambda = \mu^2$, on a l'équation suivante

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu^2.$$

D'où il vient

$$\ddot{T}(t) - a^2\mu^2 T(t) = 0, \tag{1.6}$$

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0. \tag{1.7}$$

Ces équations différentielles (1.6) et (1.7) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = Ae^{a\mu t} + Be^{-a\mu t}, \tag{1.8}$$

$$X(x) = Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}, \tag{1.9}$$

où A, B, C et D sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = \left(Ae^{a\mu t} + Be^{-a\mu t}\right)\left(Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}\right).$$

Cherchons maintenant les constantes C et D de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \qquad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.9), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} C \times 1 + D \times 1 = 0, \\ Ce^{\mu l} + De^{-\mu l} = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $C = -D$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$C\left(e^{\mu l} - e^{-\mu l}\right) = 0.$$

D'où $C = D = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

2. *Deuxième cas* $\lambda = 0$.

Pour cette valeur de $\lambda = 0$, on a l'équation suivante

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

D'où il vient

$$\ddot{T}(t) = 0, \tag{1.10}$$

$$X''(x) = 0. \tag{1.11}$$

Ces équations différentielles (1.10) et (1.11) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = At + B, \tag{1.12}$$

$$X(x) = Cx + D, \tag{1.13}$$

où A, B, C et D sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = (At + B)(Cx + D).$$

Cherchons maintenant les constantes C et D de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \quad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.13), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} C \times 0 + D = 0, \\ Cl + D = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $D = 0$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$Cl = 0.$$

D'où $C = D = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

3. *Troisième cas* $\lambda < 0$.

Prenons $\lambda = -\mu^2$
Pour cette valeur de $\lambda = -\mu^2$, on a l'équation suivante

$$\frac{\ddot{T}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2.$$

D'où il vient

$$\ddot{T}(t) + a^2\mu^2 T(t) = 0, \tag{1.14}$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0. \tag{1.15}$$

Ces équations différentielles (1.14) et (1.15) admettent les solutions générales suivantes

$$T(t) = A\cos a\mu t + B\sin a\mu t, \tag{1.16}$$

$$X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x, \tag{1.17}$$

où A, B, C et D sont des constantes arbitraires. Portons les expressions de $X(x)$ et $T(t)$ dans (1.4), on obtient la solution particulière $u(t,x)$ de l'équation (1.1) sous la forme

$$u(t,x) = (A\cos a\mu t + B\sin a\mu t)(C\cos\mu x + D\sin\mu x).$$

Cherchons maintenant les constantes C et D de telles sorte que les conditions (1.2) du problème (P_1) soient vérifiées. C'est à dire, on écrit

$$u(t,0) = T(t)X(0) = 0, \quad u(t,l) = T(t)X(l) = 0.$$

Bien entendu, $T(t) \neq 0$ sinon, on doit avoir $u(t,x) = 0$, contradiction avec le fait que la solution particulière $u(t,x)$ est non nulle. D'où, on obtient $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$. Portons ces valeurs $x = 0$ et $x = l$ dans l'équation (1.17), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} C \times 1 + D \times 0 = 0, \\ C\cos\mu l + D\sin\mu l = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on tire $C = 0$ ce qui donne de la deuxième équation la relation suivante

$$D\sin\mu l = 0,$$

avec $D \neq 0$ sinon, on aura $X(x) = 0$ et par conséquent $u(t,x) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. D'où la relation

$$\sin \mu l = 0,$$

ou encore

$$\mu l = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.18}$$

Ce qui donne la fonction $X(x)$ sous la forme

$$X(x) = D \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{1.19}$$

Remarque 1

Dans l'expression (1.18), on ne peut pas donner la valeur $n = 0$ car dans ce cas la fonction $X(x)$ devient nulle et par le suite la solution particulière $u(t,x)$ sera nulle aussi.

Pour les mêmes valeurs de μ, l'expression (1.16) devient

$$T(t) = A \cos \frac{an\pi}{l} t + B \sin \frac{an\pi}{l} t, \quad n = 1, 2, ... \tag{1.20}$$

On remarque que pour chaque valeur de n, on obtient une valeur pour μ, ce qui nous force d'écrire la solution dans l'expression (1.4) vérifiant les conditions (1.2) sous la forme

$$u_n(t,x) = \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{1.21}$$

Remarque 2

Pour chaque valeur de n, on a une valeur de μ et par conséquent une valeur A notée A_n et une valeur de B notée B_n. Bien entendu, la constante D est incluse dans ces valeurs.

L'équation (1.1) étant linéaire et homogène, alors la somme des solutions de l'équation (1.1) est aussi une solution de cette équation, ce qui donne la représentation de la solution $u(t,x)$ sous forme d'une série

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x), \tag{1.22}$$

ou encore

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{1.23}$$

Il faut noter que la série (1.22) est solution de l'équation (1.1) uniquement si elle est convergente ainsi que les séries obtenues après dérivation terme à terme par rapport à x et à t.

De plus, la série (1.22) doit satisfaire aux conditions aux limites (1.3). D'où il faut choisir les coefficients A_n et B_n d'une façon adéquate.

Posons $t=0$ dans la série (1.23), on obtient

$$u(0,x)=\varphi_1(x),$$

ou encore

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{1.24}$$

La convergence de la série (1.24) et le développement de la fonction $\varphi_1(x)$ en série de Fourier sur l'intervalle $]0,l[$ nous force à donner les coefficients A_n sous la forme

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{1.24}$$

Dérivons les termes de la série (1.23) par rapport à t et posons $t=0$ dans la série dérivée, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\varphi_2(x),$$

ou encore

$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{1.25}$$

La convergence de la série (1.25) et le développement de la fonction $\varphi_2(x)$ en série de Fourier sur l'intervalle $]0,l[$ nous force à donner les coefficients B_n sous la forme

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\varphi_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{1.26}$$

Remarque 3

Il est à noter que la solution du problème est donnée par la formule

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{1.27}$$

Exemple 1
Trouver la solution du problème (P_1) suivant

$$(P_1) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\[2ex] u(t,0) = 0, \quad u(t,3) = 0, \\[2ex] u\left(0,x\right) = \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right) = \cos x \end{cases}$$

Solution
La solution $u(t,x)$ du problème (P_1) pour $a = \sqrt{2}$ et $l = 3$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\sqrt{2}n\pi}{3} t + B_n \sin \frac{\sqrt{2}n\pi}{3} t \right) \sin \frac{n\pi}{3} x, \end{aligned}$$

avec la conditions initiale $u(0,x) = \sin x$ au point $t = 0$, c'est à dire

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{3} x = \sin x, \tag{1.28}$$

et la condition initiale $\dfrac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right) = \cos x$, au point $t = 0$, c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}n\pi}{3} B_n \sin \frac{n\pi}{3} x = \cos x. \tag{1.29}$$

Utilisons le développement des fonctions $\varphi_1(x) = \sin x$ et $\varphi_2(x) = \cos x$ en série de Fourier suivant les fonctions $\sin \dfrac{n\pi}{3} x$, il vient

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} \sin \frac{n\pi}{3} x, \tag{1.30}$$

ou encore

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n} \sin \frac{n\pi}{3} x, \tag{1.31}$$

par l'identification des deux équations(1.28) et (1.20) , on obtient l'égalité des coefficients $A_n = \varphi_{1n}$ données par

$$\begin{aligned} A_n = \varphi_{1n} &= \frac{2}{l} \int_0^3 \varphi_1 (x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \sin x \sin \frac{n\pi}{3} x dx \\ &= 2 (-1)^{n+1} \frac{n\pi \sin x}{n^2\pi^2 - 9}. \end{aligned}$$

ou encore par l'identification des deux équations(1.29) et (1.31) , on obtient l'égalité des coefficients $B_n = \varphi_{2n}$ données par

$$\begin{aligned} B_n = \varphi_{2n} &= \frac{2}{l} \int_0^3 \varphi_2 (x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \cos x \sin \frac{n\pi}{3} x dx \\ &= 2 (-1)^{n+1} \frac{n\pi \cos 3 + 1}{n^2\pi^2 - 9}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la solution $u(t, x)$ sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n\pi}{n^2\pi^2 - 9} \left(\sin 3 \cos \frac{\sqrt{2}n\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}n\pi}{3} \cos 3 \sin \frac{n\pi}{3} x \right) \sin \frac{n\pi}{3} x$$

2. **Problème nonhomogène sans conditions initiales**

$$(P_2\ ) \ = \ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \ a \neq 0 & (2.1) \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (2.2) \\ u\,(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(0,x) = 0. & (2.3) \end{cases}$$

Résolution du problème (P_2)
La fonction cherchée $u(t,x)$ est sous la forme d'une série

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{2.4}$$

Suivant les fonctions propres $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{l} x$ du problème de Sturm Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0.$$

Portons (2.4) dans (2.1), il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{T}_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{l} x = f(t,x). \tag{2.5}$$

Développons la fonction $f(t,x)$ dans l'intervalle $]0,l[$ en série de Fourier en sinus, on obtient

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{2.6}$$

et comparons (2.5) et (2.6), on obtient les équations différentielles suivantes

$$\ddot{T}_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), \tag{2.7}$$

avec

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(t,x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \qquad n = 1, 2, ... \ .$$

En résolvant ces équations pour les conditions initiales nulles

$$T_n(0) = 0, \quad \dot{T}_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, ... \ , \tag{2.8}$$

Exemple 2
Trouver la solution du problème (P_2) suivant

$$(P_2) \ = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,2) = 0, \\ u(0,x) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

Solution
La solution $u(t,x)$ du problème (P_2) pour $a = 3$ et $l = 2$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{2} x, \end{aligned}$$

où les fonctions $T_n(t)$ sont solutions des équations différentielles suivantes

$$\ddot{T}_n(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),$$

ou encore

$$\ddot{T}_n(t) + \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = f_n(t),$$

avec les fonctions $f_n(t)$ sont calculées comme suit

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(t,x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{2}\int_0^2 xt \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\ & \quad t\int_0^2 x \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \left(\frac{(-1)^{n+1} 4}{n\pi}\right) t. \end{aligned}$$

Notons que l'équation différentielle linéaire du second ordre avec les conditions initiales $T_n(0) = 0, \quad \dot{T}_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, ...$,

$$\ddot{T}_n(t) + \left(\frac{3n\pi}{2}\right)^2 T_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} 4}{n\pi} t, \tag{2.10}$$

admet comme solution l'expression suivante

$$T_n(t) = \frac{(-1)^n 32}{27n^3\pi^3} \sin \frac{3n\pi}{2} t + \frac{(-1)^{n+1} 16}{9n^2\pi^2} t. \tag{2.11}$$

D'où la solution $u(t, x)$ donnée par

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n 32}{27n^3\pi^3} \sin \frac{3n\pi}{2} t + \frac{(-1)^{n+1} 16}{9n^2\pi^2} t \right) \sin \frac{n\pi}{2} x$$

3. **Problème nonhomogène avec conditions initiales**

$$(P_3) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (3.1) \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.2) \\ u(0,x) = \varphi_1(x), \quad \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varphi_2(x). & (3.3) \end{cases}$$

Pour résoudre le problème (P_3), on doit chercher la solution sous la forme d'une somme

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{3.4}$$

où $v(t,x)$ est solution du problème (P_1) suivant

$$(P_1) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad a \neq 0. & (3.5) \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.6) \\ v(0,x) = \varphi_1(x), \quad \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x). & (3.7) \end{cases}$$

et $w(t,x)$ est solution du problème (P_2)

$$(P_2) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (3.8) \\ w(t,0) = 0, \quad w(t,l) = 0, \quad l > 0. & (3.9) \\ w(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial w(0,x)}{\partial t} = 0, & (3.10) \end{cases}$$

La solution du problème (P_3) s'obtient comme suit

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{3.11}$$

avec $T_n(t)$ sont définies par la formule qui donne la solution de l'équation (13) satisfaisant aux conditions (14) et les coefficients A_n et B_n par

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{3.12}$$

4. **Problème nonhomogène avec conditions initiales et conditions aux limites**

$$(P_4) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad a \neq 0. & (4.1) \\ u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t), \quad l > 0. & (4.2) \\ u(0,x) = \varphi_1(x), \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x). & (4.3) \end{cases}$$

On cherche la solution du problème (P_4) sous la forme

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x), \tag{4.4}$$

avec $w(t,x)$ prend la forme

$$w(t,x) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \tag{4.5}$$

(c'est une fonction vérifiant les conditions aux limites données) et $v(t,x)$ est une solution du problème (P_3) suivant

$$(P_3) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t,x) - \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad a \neq 0. & (4.6) \\ v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = 0, \quad l > 0. & (4.7) \\ v(0,x) = \varphi_1(x) - w(0,x), \quad \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t} = \varphi_2(x) - \dfrac{\partial w(0,x)}{\partial t}. & (4.8) \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduit à un problème (P_3) pour la fonction $v(t,x)$.

Remarque

On réussit parfois à obtenir une fonction $u(t,x)$ satisfaisant à l'équation non homogène (4.1) du problème (P_4) et aux conditions aux limites données (4.2) du problème (P_4). On cherche alors la solution du problème (P_4) sous la forme $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ et on constate que la fonction $v(t,x)$ vérifie l'équation nonhomogène (4.6) du problème (P_3), les conditions aux limites (4.7) et les conditions initiales (4.8).

Bibliographie

[1] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Msila Algérie 2004.

[2] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires. Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 Algeria
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr