§2. Espaces de Banach

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \,, \ \ \forall \, x \in E, \, \forall \, \lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,, \ \ \forall \, x, y \in E$

Espaces Normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$.

Proposition 1

Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ *est un espace métrisable.*

Démonstration

Pour tout $x, y \in E$, on définit la fonction ρ par

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \,.$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = 0,$$

ou encore

$$x - y = 0.$$

D'où l'égalité

$$x = y.$$

Il est évident de voir que la distance $\rho(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \rho(y, x). \end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \\
&\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\
&= \rho(x,z) + \rho(z,y).
\end{aligned}$$

Suites de Cauchy

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \| \, \|)$, on dit que la suite x_n est de Cauchy si, on a la relation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

lemme 1

Soit x_n une *suite de Cauchy dans un espace normé* $(E, \|.\|)$ *contient une sous suite* x_{nk} *convergente vers* x alors la suite x_n *est aussi convergente vers le même élément* x.

Démonstration

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon, \ \forall p, q \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned}
\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \quad \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\
&\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Espaces complets

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'éléments de E est une suite convergente dans E.

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon, \quad \text{on a} \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Espaces de Banach

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

Espaces produits

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y), \quad \text{tels que } x \in E \ \text{ et } y \in F\},$$

est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, par l'une des normes produits suivantes

- $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \quad \forall\, x \in E\,,\ y \in F$
- $\|(x, y)\|_P = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, x \in E\,,\ y \in F; \quad 1 < p < \infty$
- $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E + \|y\|_F\} \quad \forall\, x \in E\,,\ y \in F$

Opérateurs continus

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a, la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$, c'est à dire

$$\lim_{n \to \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \to \infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1

L'opérateur A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

Théorème 1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en un point x_0 de G.

Démonstration

Soit x_n une suite convergente vers x alors cette suite peut s'écrire comme sous la forme

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0), \\ &= y_n + (x - x_0). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite y_n est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim y_n = \lim[x_0 + (x_n - x)] = x_0,$$

la composition des deux membres par l'opérateur A, donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur A étant continu au point x_0 alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x). \end{aligned}$$

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \;\; \forall\, x \in E. \tag{1}$$

Proposition 2

La plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) *est appelée norme de A notée $\|A\|$ et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F\,. \tag{2}$$

Démonstration

En effet, de la relation (1), les constantes C s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \quad \forall x \in E, \quad x \neq 0.$$

D'où, il est simple de voir que la plus petite des constantes C notée $\|A\|$ s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on écrit

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}, \\
&= \sup_{x\neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F, \\
&= \sup_{x\neq 0} \left\| A(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F, \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F ..
\end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F .$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|A(x)\|_F .$$

De plus, pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\|A(x)\|_F &= \|x\|_E \left\| A(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F, \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F .$$

Passons au suprimum sur la boule fermée $\overline{B(0,1)}$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F .$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|A(x)\|_F .$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\neq 0} \|A(x)\|_F .$$

Proposition 3

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.

Démonstration

Supposons que la norme $\|A\|$ n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément x de E, tel que

$$\|x\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \sup \|A(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite x_n de E telle que

$$\|x_n\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \|A(x_n)\|_F = \alpha_n,$$

avec

$$\lim \alpha_n = \infty.$$

Définissons la suite y_n par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire $\lim y_n = 0$. D'où, il vient

$$\begin{aligned} \lim \|A(y_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1. \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que A est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0,$$

ce qui affirme que la constante $C = \|A\|$ est finie pour tout opérateur A linéaire et continu.

Théorème 2
Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Démonstration
Condition suffisante
Supposons que l'opérateur A est borné alors, on a

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E \, ,$$

ou encore

$$\|A(x) - A(0)\|_F \leq C \|x - 0\|_E \, .$$

D'où la continuité de l'opérateur A au point 0. Autrement dit, $\lim A(x) = A(0)$ lorsque $\lim x = 0$. Ce qui entraîne la continuité partout.
Condition nécessaire
Soient x et y deux éléments de E tels que

$$x \in \overline{B(0,1)} = \{x \in E, \quad \|x\|_E \leq 1\},$$

et

$$y \in S(0,1) = \{y \in E, \quad \|y\|_E = 1\}.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|A(y)\|_F \leq \sup \|A(x)\|_F = \|A\| \, .$$

D'autres part, pour tout $x \in E$ tel que $x \neq 0$, on a $\dfrac{x}{\|x\|_E} \in S(0,1)$ cela veut dire que l'on a

$$\left\| A(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F \leq \|A\| \, ,$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|_E}\|A(x)\|_F \leq \|A\|,$$

ce qui implique la relation

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \|x\|_E .$$

D'où l'opérateur A est borné, car la constante $\|A\|$ est toujours finie pour les opérateurs A continus.

Espaces isomorphes

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F, c'est à dire

- A est bijectif sur E dans F.
- A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Espaces isométriques

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, on dit que E et F sont isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F, c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Remarque 2

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$, on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 , \ \forall \ x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces normés $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$.

Théorème 3

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration

Soit $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ une base de E, alors pour tout élément $x \in E$ on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Définissons sur E deux normes $(E, \|.\|)$ et $(E, \mathcal{N})$, alors, pour tout $x, y \in E$, tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, on a, la relation

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| &\leq \mathcal{N}(x-y), \\ &= \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i), \\ &= \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta)_i e_i), \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \mathcal{N}(e_i). \end{aligned}$$

Cette inégalité entraîne la continuité de la norme $\mathcal{N}$ sur E car on a, $\lim \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ lorsque $\lim x = y$.

Etant donné que la sphère $S(0,1) = \{x \in E; \quad \|x\| = 1\}$ est compact comme un ensemble fermé et borné dans un espace E de dimension finie et $\mathcal{N}(x)$ une fonction continue positive, alors cette fonction est uniformément continue et atteint ses bornes sur la sphère, c'est à dire

$$\exists M > 0, \ \exists m > 0, \quad \text{telle que} \ \ m \leq \mathcal{N}(\frac{x}{\|x\|}) \leq M,$$

ou encore

$$m \|x\| \leq \mathcal{N}(x) \leq M \|x\|.$$

Lemme 2

Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet

Démonstration

Soit x_n une suite de Cauchy de E, alors la suite est bornée dans un espace de dimension finie. D'où on peut extraire une sous suite x_{nk} convergente vers un élément x de E ce qui implique que la suite x_n converge aussi vers le même élément x de E. D'où la complétude de l'espace E.

Corollaire 1

Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est complet

En effet, F est de dimension finie toute ses normes sont équivalente. De plus F est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ qui est complet et par conséquent F est complet dans E.

Lemme 3

Tout espace Banach $(E, \|.\|)$ est fermé.

Démonstration

Soit x_n une suite d'éléments de E convergente vers x, alors x_n est une suite de Cauchy dans un espace complet E. D'où x_n est convergente dans E.

Corollaire 2

Tout sous espace F complet d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est fermé

En effet, soit $x_0 \in \overline{F}$ alors il existe une suite x_n d'éléments de F convergente vers x_0 dans E, la suite convergente x_n est de Cauchy dans F complet ce qui implique que la suite x_n est convergente dans F, la limite étant unique. D'où $x_0 \in F$. Autrement dit, $F = \overline{F}$ ou encore F fermé.

Corollaire 3

Tout sous espace F de dimension finie d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est fermé.

En effet, il est clair que l'espace de dimension finie F est complet et par conséquent F est fermé.

Remarque 3

Tout sous espace F de dimension infinie d'un espace normé $(E, \| \ \|)$ n'est pas nécessairement fermé.

En effet, il suffit de prendre $E = C([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme uniforme

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\|$$

et soit F l'ensemble des polynômes qui est un sous espace de $C([a,b])$, non fermé car d'après Weierstrass on a, toute fonction continue sur $[a,b]$ est une limite d'une suite uniformément convergente de Polynômes. Autrement dit, la fermeture de $\overline{F}$ coïncide avec $C([a,b])$.

Théorème 4

Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ de tous les opérateurs A linéaires continus sur E dans F muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.

Démonstration

• Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\|A\| = 0$, la relation de la continuité

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \, \|x\| \, ,$$

nous donne la nullité de l'opérateur A, c'est à dire

$$A(x) = 0, \quad \forall\, x \in E.$$

D'où la relation

$$A = 0.$$

• Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ alors, on a $A_1 + A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1 + A_2\| \, \|x\| \, .$$

De plus on a, aussi

$$\begin{aligned} \|A_1(x) + A_2(x)\| &\leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \\ &\leq \|A_1\| \, \|x\| + \|A_2\| \, \|x\| \\ &\leq (\|A_1\| + \|A_2\|) \, \|x\| \, . \end{aligned}$$

Notons que $\|A_1 + A_2\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\| .$$

• Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, on a $\lambda A \in \mathcal{L}(E, F)$, c'est à dire

$$\|\lambda A(x)\| \leq \|\lambda A\| \|x\| .$$

De plus on a, aussi

$$\begin{aligned} \|\lambda A(x)\| &= |\lambda| \|A(x)\| \\ &\leq |\lambda| \|A\| \|x\| . \end{aligned}$$

Notons que $\|\lambda A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\| .$$

D'autres part on a, la relation

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\| ,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A(x)\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\| \|x\|. \end{aligned}$$

Notons que $\|A\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|,$$

ou encore

$$|\lambda| \|A\| \leq \|\lambda A\| .$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité

$$|\lambda| \|A\| = \|\lambda A\| .$$

Théorème 5

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach.

Démonstration

En effet, soit $\{A_n\}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$,

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \ \exists\,N_\varepsilon,\ \forall\,p,q \geq N_\varepsilon \quad \|A_p - A_q\| < \varepsilon,$$

alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|A_p(x) - A_q(x)\| &= \|(A_p - A_q)(x)\|\,, \\ &\leq \|A_p - A_q\|\,\|x\|\,, \\ &< \varepsilon\,\|x\|\,. \end{aligned}$$

D'où, on tire que $\{A_n(x)\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach F, alors $A_n(x)$ converge dans F vers un opérateur $A(x)$. Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{p\to\infty} \|A_p(x) - A_q(x)\| = \|A(x) - A_q(x)\| < \varepsilon\,\|x\|\,, \quad \forall\,q \geq N_\varepsilon,$$

d'où l'opérateur $B(x) = A(x) - A_q(x)$ est borné donc continu de E dans F, il est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire

$$\|A(x) - A_q(x)\| \leq \|A - A_q\|\,\|x\|\,,$$

Notons que $\|A - A_q\|$ est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A - A_q\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de la suite A_q vers A dans $\mathcal{L}(E,F)$. L'opérateur A est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ comme différence de deux opérateurs continus

$$A(x) = B(x) - A_q(x) \in \mathcal{L}(E,F).$$

Dual topologique

On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Remarque 4

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans F. En particulier Le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est inclus dans le dual algébrique $E^+ = L(E, \mathbb{K})$.

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.