§3. Traces des fonctions dans les espaces de Sobolev

Soit $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \;\text{ avec }\; x_n > 0\},$$

et soit $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω telle que

$$\Gamma = \partial\Omega = \{x = (x', 0) \;\text{ avec }\; x \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

Soit l'ensemble fermé $\overline{\Omega} = \overline{\mathbb{R}_+^n}$ donné par

$$\overline{\mathbb{R}_+^n} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \;\text{ tel que }\; x_n \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n \cup \Gamma.$$

Lemme 1
L'espace $D(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^n)$.

En effet, il suffit de prendre la même démonstration de la densité de $D(\mathbb{R}^n)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2
Pour tout $u \in D(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, l'injection de $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ est continue c'est à dire

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}$$

Démonstration
On a

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^2 &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}(|u(x', x_n)|^2) dx_n \\ &= -2\int_0^\infty |u(x', x_n)| \frac{\partial |u(x', x_n)|}{\partial x_n} dx_n, \end{aligned}$$

cela implique

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^2 &\leq 2\int_0^\infty |u(x', x_n)| \left|\frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\right| dx_n \\ &\leq 2\left(\int_0^\infty |u(x', x_n)|^2 dx_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^\infty |u(x', x_n)|^2 dx_n + \int_0^\infty \left|\frac{\partial u(x', x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n. \end{aligned}$$

D'où il vient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|u^2(x',0)\right| dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty |u(x',x_n)|^2 \, dx_n dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^\infty \left|\frac{\partial u(x',x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n dx',$$

ou encore

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

Conséquence

Il en résulte des lemmes précédents, qu'on peut définir une application, notée γ_0 telle que

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : D(\overline{\mathbb{R}^n_+}) & \rightarrow & D(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \longmapsto & \gamma_0(u) = u(x',0) \end{array}$$

L'application $\gamma_0(u) = u(\cdot,0)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, notée encore par γ_0 et l'inégalité du lemme 2 a lieu pour tout u de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, ainsi lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, on peut définir la valeur au bord $u\,|_\Gamma$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$, en tant que fonction de $L^2(\Gamma)$.

Ouvert régulier

Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit 1-régulier si

- Ω est borné.
- La frontière Γ de Ω est une variété de classe C^1 de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul coté de Γ.

Interprétation

La définition de l'ouvert régulier signifie qu'il existe un nombre fini d'ouverts bornés notés θ_i de $\mathbb{R}^n$ $(0 \leq i \leq I)$, tels que

- $\overline{\theta_0} \subset \Omega$ et l'ensemble$\{\theta_i\}_{i=0}^I$ soit un recouvrement de $\overline{\Omega}$
- $\{\theta_i\}_{i=1}^I$ soit un recouvrement de Γ. Pour chaque $i = 1,...,I$, il existe une application

- Pour chaque $i = 1, ..., I$, il existe une application φ_i de classe C^1 définie sur θ_i à valeurs dans Q tel que

$$Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ avec } |y'| < 1, \ |y_n| < 1\}.$$

La fonction φ_i est inversible et son inverse φ_i^{-1} étant de classe C^1 définie sur Q à valeurs dans θ_i, telle que

$$\begin{aligned} \varphi_i(\theta_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y \in \mathbb{R}^n, \ y_n > 0\} = Q_+ \\ \varphi_i(\theta_i \cap \Gamma) &= Q \cap \{y \in \mathbb{R}^n, \ y_n = 0\} \end{aligned}$$

Théorème1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, 1-régulier, alors il existe un opérateur $P \in \mathfrak{L}\left(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}^n)\right)$, dit 1-prolongement tel que,

$$\forall u \in H^1(\Omega), \ Pu = u$$

presque partout dans Ω.

Théorème2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, 1-régulier, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, 1-régulier, alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 : D(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma_0(u) = u_{/\Gamma}, \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Théorème4

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ assez régulière, alors

$$H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0 = \{v \in H^1(\Omega), \ \gamma_0(u) = 0\}.$$

Théorème5

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ, alors si u et v appartiennent à $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma uv\eta_i d\sigma,$$

η_i: la $i^{\text{èmè}}$ composante du vecteur unitaire normal à Γ, dirigé vers l'extérieur.

Démonstration

On utilise la densité de l'espace $D(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, la formule étant valable dans $D(\overline{\Omega})$, pour montrer que cette formule reste toujours valable dans $H^1(\Omega)$, il suffit de vérifier que les expresions

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx, \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

et

$$\int_\Gamma uv\eta_i d\sigma,$$

définissent des formes bilinéaires continues sur $H^1(\Omega)$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left|\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v dx\right| & \leq & \left(\displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\int_\Omega v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega uv\eta_i d\sigma. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left|\displaystyle\int_\Gamma uv\eta_i d\sigma\right| & \leq & \displaystyle\int_\Gamma |u|\,|v|\,d\sigma \\ & \leq & \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

Pour les suites u_m et v_m de l'espace $D(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_m dx \to \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx$$

References

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Functional analysis. Nauka editions, 1982.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Graylock press, 1961.

[3] **V. MIKHAILOV.** Partial differential equations. Mir Publishers, 1978.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle. Université de Msila Algeria 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York, 1973.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 Algeria
E-mail. mostefanadir @yahoo.fr
Website. www.mostefanadir.com