§4. Les espaces Euclidiens

Les espaces Euclidiens ou (préhilbertien) sont en général les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire. Rappelons que ce concept permet de pratiquer le raisonnement de la géométrie euclidienne pour des espaces fonctionnels de dimension infinie.

Produit Scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une fonction $\langle f, g \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, possédant les propriétés suivantes

- $\langle f, f \rangle \geq 0,$
- $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0,$
- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \, ,$
- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \, ,$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle f, g \rangle},$

où les éléments f, g et h appartiennent à E et le scalaire λ appartient à $\mathbb{K}$.

Remarque 1

La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes

- $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- $\langle f, \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle \, .$

Espace Euclidien (préhilbertien)

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

On remarque que toutes les propriétés de la norme sont vérifiées, due à la notion du produit scalaire, sauf peut être l'inégalité triangulaire, où on doit faire intervenir l'inégalité de Cauchy-Shwartz dite aussi inégalité de (Cauchy-Bouniakovsky)

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \, . \, \|g\| \, , \quad \forall f, g \in E.$$

Pour la démonstration de cette inégalité, il suffit de considérer l'expression $\langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle$ qui est toujours positive pour tout vecteurs non nuls $f, g \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

En effet,

$$\langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle = \langle f, f\rangle + \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \lambda\langle g, f\rangle + |\lambda|^2\langle g, g\rangle,$$

posons la valeur de λ comme suit

$$\lambda = -\frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle},$$

on aura l'expression suivante

$$\langle f, f\rangle - \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} - \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} + \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{\langle g, g\rangle} \geq 0.$$

D'où l'inégalité

$$\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle - |\langle f, g\rangle|^2 \geq 0,$$

ou encore

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f.\|\,\|g\|, \quad \forall f, g \in E.$$

Cependant, l'inégalité triangulaire découle directement de l'inégalité de Cauchy-shwartz.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle \\
&= \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\
&\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Remarque 2

L'inégalité de Cauchy-Shwartz se réduit à une égalité si et seulement si, les deux vecteurs sont linéairement dépendants, c'est à dire $g = \lambda f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Théorème 1

Soient f et g deux vecteurs d'un espace euclidien E alors, on a les relations suivantes

- $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle f,g\rangle$
- $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2$
- $\|f\|^2 + \|g\|^2 = 2\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|^2 + 2\left\|\dfrac{f-g}{2}\right\|^2$
- Si, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle = \langle f,g\rangle$
- Si, on a f_n et g_n sont deux suites de Cauchy, alors $\langle f_n, g_n\rangle$ est de Cauchy.

Démonstration

Pour la démonstration du théorème, il suffit de prendre les relations

$$\begin{array}{rcl} \|f+g\|^2 &=& \langle f+g, f+g\rangle \\ \|f-g\|^2 &=& \langle f-g, f-g\rangle \end{array}$$

• Appliquons par la suite l'inégalité de Cauchy-Shwartz. Les relations citées au dessus sont semblables à celles connues en géométrie euclidienne élémentaire. Autrement dit, on obtient

- $\|f+g\|^2 = f\|^2 + \|g\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle f,g\rangle$
- $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2$
- $\|f\|^2 + \|g\|^2 = 2\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|^2 + 2\left\|\dfrac{f-g}{2}\right\|^2.$

Si les vecteurs réels f et g sont orthogonaux, la première relation s'identifie avec le théorème de Pythagore.

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

• Quant à la deuxième relation, c'est l'identité du parallélogramme donnée par la somme des carrés des diagonales égale à la somme des carrés des côtés.

• La troisième relation exprime le théorème de la médiane, la somme des carrés de deux cotés d'un triangle est égale au double du carré de la médiane par rapport au troisième côté plus le double de la moitié du carré du troisième côté.

• La quatrième relation exprime la continuité du produit scalaire.

En effet, on a

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle f_n - f, g_n \rangle + \langle f, g_n - g \rangle| \\ &\leq \|f - f_n\| \, \|g_n\| + \|f\| \, \|g - g_n\| \end{aligned}$$

la suite g_n étant bornée, le second membre de cette inégalité tend vers 0. D'où la continuité du produit scalaire.

• La cinquième relation exprime la conservation du produit scalaire aux suites Cauchy.

En effet, on a

$$\begin{aligned} |\langle f_p, g_p \rangle - \langle f_q, g_q \rangle| &= |\langle f_p - f_q, g_p \rangle + \langle f_q, g_p - g_q \rangle| \\ &\leq \|f_p - f_q\| \, \|g_p\| + \|f_q\| \, \|g_p - g_q\| , \end{aligned}$$

les suites f_n et g_n étant bornées, le second membre de cette inégalité tend vers 0, d'où le produit scalaire de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.

Corollaire 1

Soit E un espace Euclidien (préhilbertien) alors, on a les relations suivantes

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$.
- Si f_n est une suite de Cauchy, alors $\|f_n\|$ est aussi une suite de Cauchy.

Remarque 3

Notons que l'on peut avoir l'expression $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle = 0$ sans que les vecteurs f et g soient orthogonaux.

Remarque 4

Notons que le produit scalaire réel permet de définir la norme et aussi de définir l'angle entre les deux vecteurs f et g par la formule

$$\cos \varphi = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| . \|g\|}$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-shwartz, le second membre de cette égalité a une valeur absolue inférieure ou égale à l'unité. D'où la définition d'un angle φ, tel que $0 \leq \varphi \leq \pi$, pour tout vecteurs f, g de E.

Remarque 5

Notons que dans un espace euclidien complexe, on n'introduit pas la notion d'angle de deux vecteurs, car l'expression donnée au dessus est en général complexe, qui ne peut être le cosinus d'un angle.

Orthogonalité

On dit que deux vecteurs f et g d'un espace euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire $\langle f, g \rangle$ est nul, c'est à dire

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Propriétés

• Si un vecteur f de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F, on dit que f est orthogonal à l'ensemble F et, on écrit

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in F.$$

• Si les vecteurs de deux ensembles F_1 et F_2 sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensembles sont orthogonaux et, on écrit

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in F_1,\ \forall \psi \in F_2\ .$$

• Si f est orthogonal à chacun des vecteurs $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, alors f est orthogonal à la combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est à dire

$$\langle f, \varphi_i \rangle = 0,\ \ \forall \varphi_i \in E \ \ \text{implique}\ \ \langle f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_n\varphi_n \rangle = 0.$$

• Si f est orthogonal aux éléments de la suite g_n convergente vers g, alors f est orthogonal à g.

En effet, due à la continuité du produit scalaire, on obtient

$$\langle f, g_n \rangle = 0,\ \ \forall g_n \in E \ \ \text{implique}\ \ \lim_{n\to\infty} \langle f, g_n \rangle = \langle f, g \rangle = 0.$$

• Si les vecteurs $\{f_i\}_{i=1}^n$ sont orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.

En effet, supposons que l'on a

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n = 0,$$

le système des vecteurs étant orthogonal, par multiplication des deux membres par le vecteurs f_j, on obtient

$$\langle f_j, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n \rangle = 0,$$

ou encore

$$\lambda_j \langle f_j, f_j \rangle = 0.$$

Le module au carré du vecteur f_j est différent de 0, d'où $\lambda_j = 0$ pour tout $j = 1, 2, ..., n$.

Orthogonal d'un ensemble

On appelle ensemble orthogonal d'un ensemble non vide A de E le sous ensemble de E noté $A^{\perp}$ donné par

$$A^{\perp} = \{x \in E, \quad \forall y \in A, \text{ on a } \quad \langle x, y \rangle = 0.\}$$

Proposition 1

L'ensemble orthogonal $A^{\perp}$ d'un ensemble non vide A de E est un sous espace vectoriel fermé de E.

En effet, $0 \in A^{\perp}$ car, on a la relation

$$\langle 0, y \rangle = 0, \quad \forall y \in A.$$

De plus, pour tout $x_1, x_2 \in A^{\perp}$, et pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on a $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A^{\perp}$. C'est à dire

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle &= \langle \lambda_1 x_1, y \rangle + \langle \lambda_2 x_2, y \rangle \\ &= \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle = 0, \quad \forall y \in A. \end{aligned}$$

Soit x_n une suite d'éléments de $A^{\perp}$ convergente vers x alors, on a $x \in A^{\perp}$, c'est à dire

$$\langle x_n, y \rangle = 0 \text{ implique } \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in A.$$

Système Complet (Total)

Un système $\{\varphi_i\}$ est dit complet (ou total) si le plus petit sous espace fermé qui le contient coïncide avec l'espace E tout entier. Autrement dit, l'espace E est engendré par le système $\{\varphi_i\}$ ou encore, l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de $\{\varphi_i\}$ est dense dans E. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Base hilbertienne

Un système orthogonal $\{\varphi_i\}$ est dit une base orthogonale s'il est un système complet. De plus, si la norme de chaque élément est égale à l'unité, le système $\{\varphi_i\}$ est dit base orthonormée ou base hilbertienne.

Théorème 2 (Gram-Schmidt)

Soit $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$ un système linéairement indépendant d'un espace euclidien E, alors il existe dans le même espace E un système orthonormé d'éléments $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ tel que l'on a les relations suivantes

$$\varphi_n = \alpha_{n1}\psi_1 + \alpha_{n2}\psi_2 + ... + \alpha_{nn}\psi_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } \ \alpha_{nn} \neq 0,$$

et

$$\psi_n = \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + ... + \alpha_{nn}\varphi_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } \beta_{nn} \neq 0.$$

C'est à dire

$$\operatorname{span}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ..) = \operatorname{span}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ..).$$

Démonstration

Le système orthogonal $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \varphi_1, \\
\psi_2 &= \alpha_{21}\varphi_1 + \varphi_2, \\
\psi_3 &= \alpha_{31}\varphi_1 + \alpha_{32}\varphi_2 + \varphi_3, \\
&\vdots \\
\psi_n &= \alpha_{n1}\varphi_1 + \alpha_{n2}\varphi_2 + ... + \varphi_n.
\end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficient α_{ij}, et par conséquent les φ_i, on doit appliquer l'orthogonalité deux à deux des vecteurs φ_i; $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n-1$.

En effet , on trouve le coefficient α_{21} donné par

$$\alpha_{21} = \frac{\langle \psi_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle},$$

d'où le vecteur φ_2 orthogonal au vecteur φ_1s'écrit comme

$$\varphi_2 = \psi_2 - \frac{\langle \psi_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1,$$

ou encore les coefficients α_{31}et α_{32} donnés par

$$\alpha_{31} = \frac{\langle \psi_3, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}, \quad \text{et} \quad \alpha_{32} = \frac{\langle \psi_3, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle},$$

d'où le vecteur φ_3 orthogonal aux vecteurs φ_1 et φ_2 s'écrit comme

$$\varphi_3 = \psi_3 - \frac{\langle \psi_3, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \varphi_1 - \frac{\langle \psi_3, \varphi_2 \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle} \varphi_2.$$

Les vecteurs φ_i, $i = 1, ..., n$ seront déterminés par induction, et pour l'orthonormalité de ces vecteurs, il suffit de prendre à la place des vecteurs φ_i les vecteurs donnés par

$$\frac{1}{\|\varphi_i\|} \varphi_i, \quad \text{pour tout} \quad i = 1, ..., n..$$

Théorème 3 (Inégalité de Bessel)

Soient E un espace euclidien, $\{\varphi_n\}$ un système orthonormé d'éléments de E, alors pour tout vecteur f de E, on a la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Démonstration

Soit $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ une base orthonormée d'un espace euclidien F de dimension finie, alors pour tout vecteur $f_n \in F$, on a

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \text{ où } \alpha_i = \langle f_n, \varphi_i \rangle .$$

Les scalaires α_i sont appelés projections du vecteur f_n sur la base $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$.

L' idée est de généraliser cette décomposition dans le cas d'un espace euclidien de dimension infinie?

Soit $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n ...\}$ un système orthonormé de l'espace euclidien E, alors pour tout vecteur f de E,on fait correspondre une suite des scalaires $\langle f, \varphi_i \rangle$ appelés coefficients de Fourier de l'élément f par rapport au système $\{\varphi_n\}$, ainsi que la série $\sum \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$ qui sera appelée par la suite série de Fourier de l'élément f par rapport au système $\{\varphi_n\}$.

La question qui se pose maintenant est la suivante

• Est ce que la série de Fourier $\sum \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$ converge pour la métrique de E ?

• Si cette série converge, coïncide-t-elle avec le vecteur initial f ?

La résolution de ce problème revient à trouver le bon choix des coefficients α_i de telle sorte que la distance entre le vecteur f est le vecteur des sommes partielles $f_n = s_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ soit minimale.

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|^2 &= \left\langle f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, f - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right\rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \langle f, \varphi_i \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \varphi_i, f \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_i}, \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{i=1}^n \left(\langle f, \varphi_i \rangle - \alpha_i\right) \left(\overline{\langle f, \varphi_i \rangle - \alpha_i}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\langle f, \varphi_i \rangle \overline{\langle f, \varphi_i \rangle}\right),
\end{aligned}$$

ou encore

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n |(\langle f, \varphi_i \rangle - \alpha_i)|^2 .$$

Il est clair que l'expression $\|f - f_n\|^2$ est minimale lorsque, son dernier terme est nul, c'est à dire

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Dans ce cas, on a

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 .$$

Nous avons montrer que parmi tous les vecteurs f_n de l'espace E, celui qui s'écarte le moins de f est le vecteur f_n de somme partielle

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i,$$

où les α_i sont les coefficients de Fourier du vecteur f dans la base $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Ce résultat s'interprète géométriquement que le vecteur f_n est la projection orthogonale du vecteur f sur le sous espace F ou encore, la projection orthogonale du vecteur f sur le sous espace des combinaisons linéaires finies de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{K}. \right\}$$

Le fait que le vecteur f_n est un élément du sous espace F, cela veut dire que l'élément $f - f_n$ est orthogonal au sous espace F engendré par les vecteurs $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$. Autrement dit, l'élément donné par

$$f - f_n = f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

est orthogonal au sous espace F engendré par les vecteurs $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ si et seulement si, on a

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \alpha_i, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

ou encore

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = d^2(f, F) \geq 0.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Comme la valeur de n est arbitraire et le second membre ne dépend pas de n, alors la série est convergente vers sa borne supérieure $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$et, on en déduit le résultat suivant.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Remarque 6

La somme des carrés des projections d'un vecteur f sur un système orthonormé est toujours inférieure ou égale au carré de la longueur de ce vecteur f.

Egalité de Parseval

Un système orthonormé $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n, ...\}$ est dit fermé, si pour tout vecteur $f \in E$, on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \|f\|^2 .$$

Cette égalité est dite égalité de Parseval.

Il est clair qu'un système $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n, ...\}$ de E est fermé si et seulement si, pour tout vecteur $f \in E$, la série de Fourier de ce vecteur $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ converge vers f . Autrement dit, la suite des sommes partielles de la série Fourier $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ avec $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ converge vers l'élément f.

Théorème 4

Soit E un espace euclidien séparable alors, tout système $\{\varphi_n\}$ orthonormé fermé est complet et vice versa.

Démonstration

En effet, si le système $\{\varphi_n\}$ est complet alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in E,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon, \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit, tout vecteur $f \in E$ peut être approximer par une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ des éléments du système $\{\varphi_n\}$ qui n'est autre que la somme partielle de la série de Fourier $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ de ce vecteur. D'où la convergence de la série $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ vers le vecteur f, ce qui implique l'égalité de Parseval

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2 .$$

D'où le système $\{\varphi_n\}$ est fermé.

Réciproquement, si le système $\{\varphi_n\}$ est fermé alors, on a la relation de Parseval $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$ cette relation s'écrit aussi comme

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad \text{avec} \;\; \alpha = \langle f, \varphi_i \rangle ,$$

cela veut dire qu'il existe un vecteur $f_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, tel que

$$\|f - f_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 .$$

Utilisons l'égalité de Parseval, on obtient après passage à la limite que les sommes partielles de Fourier du vecteur f_n convergent vers f, ce qui signifie que l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments du système $\{\varphi_n\}$ est dense dans l'espace E, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \;\exists n \in \mathbb{N}, \;\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon.$$

D'où le système $\{\varphi_n\}$ est complet.

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.

[5] **K. SETERLING.** Introduction to Hilbert space. New York 1961.