Transformation de Fourier et Résultats de Compacité

Transformée de Fourier d'une fonction

Soit $v(x)$ une fonction à variables réelles ou complexes de la variable $x = (x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle transformée de Fourier de la fonction $v(x)$ la fonction complexe $\widehat{v}(\omega)$ de la variable $\omega = (\omega_1, ...\omega_n)$ donnée par

$$\widehat{v}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-ix.\omega} dx, \quad x.\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i.$$

Remarque

La transformée de Fourier $\widehat{v}(\omega)$ de la fonction $v(x)$ n'existe pas toujours.

Théorème1

Soit $v(x)$ une fonction sommable sur $\mathbb{R}^n$ alors la transformée de Fourier $\widehat{v}(\omega)$ de la fonction $v(x)$ existe. De plus cette fonction est continue, bornée et tend vers 0 lorsque $|\omega|$ tend vers ∞. C'est à dire

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \widehat{v}(\omega) = 0.$$

Dérivation de la transformée de Fourier

Soit $v(x)$ une fonction sommable, dérivable et à dérivée sommable alors, on a

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\omega) = i\omega_j \widehat{v}(\omega).$$

En effet, on a

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) e^{-ix.\omega} dx$$

intégrons par parties cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) e^{-ix.\omega} dx \\ &= i\omega_j \int_{\mathbb{R}^n} v(x) e^{-ix.\omega} dx = i\omega_j \widehat{v}(\omega). \end{aligned}$$

Propriété

L'application $v \to \widehat{v}$ est une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, (théorème de Plancherel).

Théorème2
L'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ admet la définition équivalente suivante

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

et dont la norme est donnée par

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \left\| (1 + |\omega|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Démonstration
On définit l'ensemble X comme suit

$$X = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

et l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ comme suit

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Montrons que

$$H^1(\mathbb{R}^n) = X.$$

- *Première inclusion* $H^1(\mathbb{R}^n) \subset X$

Soit u une fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ alors

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n)\ \Rightarrow u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

En vertu du théorème de Plancherel, on écrit

$$
\begin{aligned}
\widehat{u} \quad &\in \quad L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ i\omega_j \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2 \, d\omega + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_j^2 \, |\widehat{u}|^2 \, d\omega < \infty \\
&\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2 \right) |\widehat{u}|^2 \, d\omega < \infty \\
&\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\omega|^2 \right) |\widehat{u}|^2 \, d\omega < \infty \\
&\Rightarrow \quad \left(1 + |\omega|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in X
\end{aligned}
$$

D'où la première inclusion

$$H^1(\mathbb{R}^n) \subset X.$$

- *Deuxième inclusion* $X \subset H^1(\mathbb{R}^n)$.

Soit u une fonction de l'ensemble X alors

$$
\begin{aligned}
u \quad &\in \quad X \Rightarrow u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ \left(1 + |\omega|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Rightarrow \quad |\omega| \, \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \omega_j \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Rightarrow \quad i\omega_j \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \in L^2(\mathbb{R}^n) \\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^1(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

D'où la deuxième inclusion

$$X \subset H^1(\mathbb{R}^n).$$

- Calcul de la norme $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_j^2 \, |\widehat{u}|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\omega|^2\right) |\widehat{u}|^2\, dx \\
&= \left\| \left(1+|\omega|^2\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Théorème3

Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$, à frontière $\partial\Omega = \Gamma$. Alors l'injection canonique de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte. Autrement dit: Tout ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est relativement compact dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration

(Note 1) Il est connu que tout ensemble borné d'un espace de Hilbert H est faiblement relativement compact. Autrement dit, si (f_n) est une suite bornée de H, alors il existe une sous suite f_{n_k} convergente faiblement vers une fonction $f \in H$. C'est à dire

$$\forall \varphi \in H, \;\; \langle f_{n_k}, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle ,$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans l'espace de Hilbert H.

Ω étant un domaine régulier, alors il existe un opérateur P linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \;\text{on a}\;\; Pu = v \;\;\text{où}\;\; v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

De plus, on a

$$v_{/\Omega} = u \quad \text{presque partout}, \;\; \forall u \in H^1(\Omega).$$

La fonction $Pu = v$ peut être tronquée et avoir un support K contenant Ω, $(\Omega \subset K)$.

Soit u_n la suite bornée de $H^1(\Omega)$, alors il existe une constante positive C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Pour la compacité dans $L^2(\Omega)$ il faut montrer qu'il existe une sous suite u_q converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$.

La convergence faible de cette sous suite u_q dans $L^2(\Omega)$ est assurée par **(Note 1)** au dessus.

Soit v_m la suite de $H^1(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$v_m = Pu_m,\ (v_m) \subset H^1(\mathbb{R}^n),$$

alors cette fonction est bornée due à la continuité de P car, on a

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} &= \|Pu_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \end{aligned}$$

ce qui entraîne par la suite

$$\|v_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|Pu_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C'.$$

En vertu de **(Note 1)**, il existe une sous suite v_q converge faiblement vers v dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, montrons maintenant la convergence forte de la sous suite v_q vers v dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On peut toujours prendre $v = 0$, alors la norme $\|v_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$.

D'après l'égalité de Plancherel

$$\|v_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{v}_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega &= \int_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega + \int_{|\omega|\geq M} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega \\ &\leq \int^2_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega + \frac{1}{1+M^2}\int_{|\omega|\geq M} \left(1+|\omega|^2\right) |\widehat{v}_q|^2\, d\omega \\ &\leq \int_{|\omega|<M} |\ \widehat{v}_q\ |^2\, d\omega + \frac{1}{1+M^2}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\omega|^2)\, |\widehat{v}_q|^2\, d\omega \\ &\leq \int_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega + \frac{1}{1+M^2} \left\| (1+|\omega|^2)^{\frac{1}{2}} \widehat{v}_q \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2\, d\omega + \frac{1}{1+M^2} \|v_q\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

il est clair que l'on a

$$\|v_q\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C'.$$

D'où la relation

$$\frac{1}{1+M^2}\|v_q\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \text{ pour un choix convenable de } M.$$

D'autre part, comme le support de v_q est inclus dans un compact K, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{v}_q(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^n} v_q(x)e^{-ix.\omega}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1_K(x)v_q(x)e^{-ix.\omega}dx,
\end{aligned}$$

comme la fonction $1_K(x)e^{-ix\omega}$ est de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la suite $v_q \to 0$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to\infty} \widehat{v}_q(\omega) &= \lim_{q\to\infty} \langle 1_K(x)e^{-ix\omega}, v_q\rangle \\
&= \lim_{q\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 1_K(x)e^{-ix.\omega}v_q(x)dx = 0,
\end{aligned}$$

il est aisé de voir que la relation $\lim\limits_{q\to\infty} \widehat{v}_q(\omega) = 0$ nous mène à celle $\lim\limits_{q\to\infty} \widehat{v}_q^2(\omega) = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned}
\|\widehat{v}_q\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}_q|^2 dx \\
&= \|v_q\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} < C' < \infty.
\end{aligned}$$

Appliquer le théorème de la convergence dominée, où la mesure est finie et la fonction majorante est la constante C, on obtient

$$\lim_{q\to\infty} \int_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2 d\omega = 0.$$

D'où la relation

$$\begin{aligned}
\|\widehat{v}_q\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{|\omega|<M} |\widehat{v}_q|^2 \\
&= \|v_q\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

pour q assez grand, on a ainsi la majoration

$$\|v_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon \Rightarrow \lim_{q\to\infty} \|v_q\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

ce qui prouve le théorème.

Espaces de Sobolev d'ordre $m > 1$

On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur l'ouvert Ω, *l'espace noté* $H^m(\Omega)$ et donné par

$$H^m(\Omega) = \{u,\ u \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \mid \alpha \mid \leq m\}$$

Topologie de $H^m(\Omega)$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u . \partial^\alpha v \right) dx$$

et, on note

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Propriétés:

- $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour son produit scalaire.
- $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.
- Si $u \in H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ dans $H^m(\Omega)$, alors la fonction $\widetilde{u} = \begin{cases} u \text{ dans } \Omega \\ 0 \text{ dans } C\Omega \end{cases}$ est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$.
- Si Ω est très régulier, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.
- Si Ω est m-régulier, alors il existe un opérateur $P \in L(H^m(\Omega), H^m(\mathbb{R}^n))$ tel que $Pu = u$ p.p dans Ω.
- $D(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}_+^n)$.
- Soit $T \in H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \Leftrightarrow T = \sum_{|j| \leq m} \partial^j g_j,\ \ g_j \in L^2(\Omega)$.
- Si Ω est borné, alors $\forall u \in H_0^m(\Omega), \exists\, c = c(\Omega)$ telle que,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \left(\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Si Ω est régulier, alors γ

$$\begin{array}{ccl} H^m(\Omega) \to (L^2(\Gamma))^m. & & \\ u & \mapsto & \gamma u = \left(\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u\right) \text{ où } \gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial \eta_j} \end{array}$$

- $H_0^m(\Omega) = \ker \gamma$

- $H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 12 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière, alors si $m > \frac{n}{2}$, on a*

$$H^m(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}).$$

Démonstration:

Supposons que Ω est m-régulier, alors il existe $P \in L\left(H^m(\Omega), H^m(\mathbb{R}^n)\right),$ tel que

$$\forall v \in H^m(\Omega),\ Pv_{\diagup \Omega} = v \text{ presque partout.}$$

Soit $u = Pv$, avec $v \in H^m(\Omega)$ et $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

$$\widehat{u}(\omega) = \left(1 + |\omega|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}(\omega).$$

D'une part, la fonction

$$\omega \mapsto \left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

car $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, d'autre part, la fonction

$$\omega \mapsto \left(1 + |\omega|^2\right)^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\left(1 + |\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ pour } m > \frac{n}{2}.$$

En effet, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|\omega|^2\right)^m} d\omega = S_n \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^m} d\rho < \infty \Leftrightarrow m > \frac{n}{2}.$$

S_n désigne l'aire de la sphère unité $(n-1)$ dimensionnelle, ce qui implique que $\widehat{u}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. D'où la fonction u représentant la transformée de Fourier inverse donnée par

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\omega) e^{ix.\omega} d\omega,$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, de plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |u(x)| \leq \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la fonction

$$\widehat{u}(\omega) = \left(1+|\omega|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \left(1+|\omega|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}(\omega),$$

on a

$$\begin{array}{rcl}
|u(x)| & \leq & \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c(m,n) \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \\
\forall x & \in & \mathbb{R}^n, |Pv(x)| \leq c(m,n) \|Pv\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \\
\forall x & \in & \Omega,\ |v(x)| \leq c(m,n) \|Pv\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \\
\forall x & \in & \Omega,\ |v(x)| \leq c(m,n) \|Pv\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \\
 & \leq & c(m,n) \|P\|_{L(H^m(\Omega),H^m(\mathbb{R}^n))} \|v\|_{H^m(\not\leq)} \Rightarrow \\
\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} & \leq & C'(m,n) \|v\|_{H^m(\not\leq)}.
\end{array}$$

Ce qui prouve le théorème.

Corollaire

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,de frontière Γ assez régulière, alors si $m > k + \frac{n}{2}$, où k est un entier positif, on a $H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$.

Pour la démonstration, on utilise le théorème précédent avec l'entier m remplacé par $(m-k)$,on obtient, si $v \in H^m(\Omega) \Rightarrow \partial^\alpha v \in C^0(\overline{\Omega})$ pour $|\alpha| \leq k$.

Les espaces $H^s(\Omega), H^s(\Gamma)$

Définition

Soit s un réel positif $(s > 0)$, on définit

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ (1+|\omega|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \left\|(1+|\omega|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\omega|^2)^s\,|\widehat{u}|^2\,d\omega\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pour s un réel négatif ($s<0$), on pose

$$H^s(\mathbb{R}^n) = (H^{-s}(\mathbb{R}^n))'$$

Propriétés

- $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.
- $H^s(\Omega)$ est l'espace des restrictions à Ω des fonctions $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Définition

Soit Ω un ouvert borné de R^n et d'un seul coté de sa frontière Γ et (θ_i, φ_i) le système de cartes locales définissant Γ, soit $\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_I$ une partition de l'unité sur Ω, telle que $\alpha_j \in D(R^n)$ et dont le support de α_j est inclus dans θ_j, $(\operatorname{supp}\alpha_j \subset \theta_j)$, $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$, $\sum_{j=0}^{I}\alpha_j(x) = 1$.

Introduisons les notations suivantes:

$$\begin{cases} \varphi_j^*(\sqrt{\alpha_j}u)(y) = (\sqrt{\alpha_j}u)\varphi_j^{-1}(y) \\ (\varphi_j^{-1})^* v(x) = v(\varphi_j(x)) \end{cases}$$

- Si $s>0$, alors

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma) &= \{u \in L^2(\Gamma), \varphi_j^*(\sqrt{\alpha_j}u)(y',0) \\ &= (\sqrt{\alpha_j}u)\varphi_j^{-1}(y',0) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})\}, \end{aligned}$$

  avec la norme définie par

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=0}^{I}\left\|\varphi_j^*(\sqrt{\alpha_j}u)(y',0)\right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

- Si $s<0$, alors

$$H^s(\Gamma) = (H^{-s}(\Gamma))'$$

Propriétés de $H^1(\Omega)$
$\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$:

- $H^1(\Omega)$ est un Hilbert.
- $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
- Il existe $P \in L(H^1(\Omega), H^1(\mathbb{R}))$, tel que $Pu_{\diagup\Omega} = u\,,\ \forall u \in H^1(\Omega)$.
- Il existe γ_0 linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^2$. $\gamma_0 :\ u \mapsto (u(a), u(b))$.
- $H^1(\Omega) \hookrightarrow C_b(\overline{\Omega})$, où $C_b(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, de la même façon, on définit l'espace $C_b(\overline{\Omega})$.

Lemme
L'injection canonique de l'espace $H^1(\mathbb{R})$ dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$ est continue.

$$\begin{array}{rcl} H^1(\mathbb{R}) & \to & C_b(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \widetilde{u}\ ,\ \widetilde{u} = u \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \end{array}$$

Démonstration
Utilisons la densité de l'espace $D(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$, si $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi^2(x)\right| &= \varphi^2(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d(\varphi^2(t))}{dt} dt = 2\int_{-\infty}^{x} \frac{d\varphi}{dt}.\varphi(t)dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} (\frac{d\varphi}{dt})^2 dt + \int_{-\infty}^{x} \varphi^2(x)dt, \quad (2ab \leq a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \\
\left|\varphi^2(x)\right| &= \varphi^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{d\varphi}{dt})^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dt \Rightarrow \\
\left|\varphi^2(x)\right| &= \varphi^2(x) \leq \parallel \varphi \parallel_{H^1(\mathbb{R})}^2 \Rightarrow \\
\left|\varphi(x)\right| &\leq \left\|\varphi\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\,,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
\sup\left|\varphi(x)\right| &\leq \left\|\varphi\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.
\end{aligned}$$

Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$,alors il existe un suite $(\varphi_n) \subset D(\mathbb{R})$,telle que $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$, ce qui implique que cette suite φ_n est de Cauchy dans $H^1(\mathbb{R})$ et en vertu de ce qui a été démontrer au dessus, on a

$$\sup\left|\varphi_n - \varphi_m\right| \leq \left\|\varphi_n - \varphi_m\right\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

D'où φ_n est une suite de Cauchy dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$, or cet espace est un Banach d'où $\varphi_n \to \widetilde{u}$ dans $C_b(\mathbb{R})$.

Montrons que $u = \widetilde{u}$ presque partout dans $\mathbb{R}$, alors

$$\forall \psi \in D(\mathbb{R}), \text{ on a } \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi dx \to \int_{\mathbb{R}} \varphi \psi dx,$$

car la suite $\varphi_n \to \varphi$ dans $H^1(\mathbb{R})$, d'où elle converge vers la même limite dans l'espace $D'(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi dx = \int_{\mathbb{K}} \varphi \psi dx \to \int_{\mathbb{K}} \widetilde{u} \psi dx \to \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u} \psi dx,$$

car la convergence de la suite φ_n vers $\widetilde{u}$ est uniforme, d'où, on doit avoir la relation

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u \psi dx &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{u} \psi dx, \ \forall \psi \in D(\mathbb{R}) \\ &\Rightarrow u = \widetilde{u} \text{ dans } D'(\mathbb{R}) \Rightarrow u = \widetilde{u} \text{ presque partout.} \end{aligned}$$