§5. Les espaces de Hilbert

Espaces de Hilbert

On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien H complet au sens de la métrique associée à sa norme

$$\rho(f,g) = \|f-g\|.$$

Remarque 1

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Théorème (Riesz-Fischer)

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé dans un espace de Hilbert H, et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ...$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \ \forall\, i = 1, 2, ...$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2$$

Démonstration

Soit $\{f_n\}$ la suite des sommes partielles donnée par

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

De la convergence de la série $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$, on déduit que la suite $\{f_n\}$ est de Cauchy, bien entendu pour des valeurs entiers p et q assez grandes, telles que $p \leq q$, on a

$$\|f_p - f_q\|^2 = \sum_{i=p+1}^{q} |\alpha_i|^2 < \varepsilon.$$

L'espace H étant de Hilbert, alors la suite $\{f_n\}$ est une suite convergente vers un élément f de H. D'où de la relation $f = f_n + (f - f_n)$, et de la composition du système $\{\varphi_k\}$ avec les deux membres, on obtient

$$\langle f, \varphi_i\rangle = \langle f_n, \varphi_i\rangle + \langle f - f_n, \varphi_i\rangle .$$

Le second terme $\langle f - f_n, \varphi_i\rangle$ de la somme figurant au second membre tend vers 0 quand $n \to \infty$ et cela due à la continuité du produit scalaire, car

$$|\langle f - f_n, \varphi_i\rangle| \leq \|f - f_n\|.\|\varphi_i\|,$$

tandis que le premier terme $\langle f_n, \varphi_i\rangle$ de la somme figurant au second membre coïncide avec la valeur α_i, $\forall\ i \leq n$ d'où la relation $\langle f, \varphi_i\rangle = \langle f_n, \varphi_i\rangle = \alpha_i$ pour tout $i \leq n$, ce qui entraîne

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 .$$

Passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 .$$

Théorème

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H, pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul.

Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H, qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$.

Démonstration

Soit f un élément de H, orthogonal à tous les vecteurs du système complet $\{\varphi_k\}$, alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls, $\langle f, \varphi_i\rangle = 0$, $\forall i = 1, 2, ...$ le système $\{\varphi_k\}$ étant complet donc fermé. D'où l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 ,$$

qui implique que $f = 0$.

Inversement, si le système $\{\varphi_k\}$ n'est pas complet il existerait dans H un vecteur non nul g qui réalise l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|g\|^2,$$

et d'après le théorème de Riesz-Fisher, on peut trouver un élément f de H, tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2,$$

il est aisé de voir que le vecteur non nul $f - g$ est orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ d'où la condition suffisante.

Théorème

Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.

Démonstration

Soit H un espace de Hilbert séparable, il existe alors un système orthonormé et complet $\{\varphi_k\}$ tel que, pour tout vecteur $f \in H$ il existe une suite $\{\alpha_k\}$ de coefficients de Fourier telle que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty,$$

cette condition nous affirme que la suite $\{\alpha_k\}$ est un élément de l_2.

Réciproquement, soit $\{\alpha_k\}$ une suite d'éléments de l_2, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty,$$

il existe alors, d'après le théorème de Riesz-Fischer un vecteur $f \in H$ tel que,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle,$$

d'où l'existence d'un isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables et l'espace l_2.

En effet, si les éléments $f, g \in H$ ayant pour coefficients de Fourier respectivement les suites $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \in l_2$, alors les vecteurs $f+g$ et λf de H ont comme coefficients de Fourier respectives $\{\alpha_k + \beta_k\}$ et $\{\lambda \alpha_k\}$, de plus, on a

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta}_k$$

car, d'après l'égalité de Parseval

$$\langle f, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \ , \ \langle g, g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2$$

et

$$\langle f+g, f+g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)\overline{(\alpha_k + \beta_k)},$$

on a

$$\begin{aligned} < \ & \langle f+g, f+g\rangle >= \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle \\ = \ & \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha_k} \beta_k + \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 \end{aligned}$$

D'où l'égalité au dessus, en d'autres termes, l'isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables H et l'espace de Hilbert l_2, signifie qu'il existe une application bijective entre H et l_2, de plus, la somme des vecteurs, la multiplication des vecteurs par un nombre λ et le produit scalaire dans H sont les mêmes que la somme des coordonnées des vecteurs, la multiplication des coordonnées des vecteurs par un nombre λ et le produit scalaire dans l_2

Remarque

Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n, alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphes à l_2.

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.