§5. Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques

1. Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, et soit f une fonction de l'espace $L^2(\Omega)$, on considère le problème suivant. Trouver une fonction u telle que

$$(P_1) \;=\; \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{sur} \;\; \Omega & (1,1) \\ u = 0 \qquad \text{sur} \;\; \Gamma = \partial\Omega & (1,2) \end{cases}$$

où $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Supposons que la solution u du problème (P_1) est suffisamment régulière, alors $u \in H^2(\Omega)$. Multiplions l'équation $(1,1)$ par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$, et intégrons sur Ω,

$$\int_\Omega -\Delta u v dx = \int_\Omega f v dx,$$

après utilisation de la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx\,,$$

ce qui donne par la suite

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx\;, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Soit u un élément de $H^2(\Omega)$, alors la fonction u est suffisamment régulière et en vertu de $(1,2)$, on a $u_{\diagup \Gamma} = 0 \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega)$.

Si u est solution du problème (P_1), alors u est solution du problème suivant

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, telle que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx\;, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

que l'on appelle formulation variationnelle du problème (P_1). Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est suffisamment régulière, en appliquant la formule de Green a $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$, on aura

$$\int_\Omega -\Delta u v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\langle -\Delta u - f, v \rangle = 0 \ , \ \forall v \in D(\Omega),$$

ce qui donne par la suite

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \ \ D'(\Omega).$$

Le fait que l'on a $u \in H_0^1(\Omega)$ alors la fonction u est nulle sur la bord $u_{\diagup \Gamma} = 0$. D'où u est solution du problème (P_1)

2. **Problème de Neumann**

Soit $f \in L^2(\Omega)$,trouver la fonction u telle que

$$(P_2) \ = \begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{sur} \ \ \Omega & (2,1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad\qquad \text{sur} \ \ \Gamma = \partial\Omega & (2,2)\,, \end{cases}$$

on suppose que u est régulière, on multiplie par $v \in H^1(\Omega)$ l'équation $(2,1)$ et on intégre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega -\Delta u v dx + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v dx$$

par la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega u v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'où

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

si u est solution du problème (P_2), alors u est solution du problème variationnel suivant

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Réciproquement, si u est solution du problème variationnel, alors u vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in D(\Omega),$$

ou encore

$$\int_\Omega -\Delta u v dx + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in D(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u + u - f, v \rangle &= 0 \ , \ \forall v \in D(\Omega) \Rightarrow \\ -\Delta u + u &= f \quad \text{dans } D'(\Omega), \end{aligned}$$

par multiplication de $v \in H^1(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega -\Delta u v dx + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v dx$$

par la formule de Green, on aura

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega uv dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_\Omega f v dx \ , \ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Par comparaison avec le problème variationnel, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma &= 0 \ \ \forall v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \\ \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta}, v \right\rangle &= 0 \ \ \forall v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta}/_\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Formule de Green généralisée

Si $u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)$, alors $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))'$ et, on a

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

avec la relation

$$\gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Problèmes variationnels abstraits

Pour avoir la formulation varitionnelle d'un problème donné, on se donne

- Un espace de Hilbert V muni d'un produit scalaire
- Une forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} a : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & a(u,v) \end{array}$$

- Une forme linéaire

$$\begin{array}{rcl} l : V & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & l(v) \end{array}$$

Le problème variationnel s'écrit comme suit, trouver la fonction $u \in V$ telle que

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

Exemples

- **Problème de Dirichlet**

L'espace de Hilbert V est donné par

$$V = H_0^1(\Omega),$$

la forme bilinéaire $a(u,v)$ est donnée par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

la forme linéaire $l(v)$ est donnée par

$$l(v) = \int_\Omega f v dx, \ \ (f \in L^2(\Omega)).$$

- **Problème de Neumann**

L'espace de Hilbert V est donné par

$$V = H^1(\Omega),$$

la forme bilinéaire $a(u,v)$ est donnée par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \ + \int_\Omega uv dx,$$

la forme linéaire $l(v)$ est donnée par

$$l(v) = \int_\Omega f v dx, \quad (f \in L^2(\Omega)).$$

Coercivité

La forme bilinéaire $a(u,v)$ est dite coercive, ou V-elliptique s'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que

$$\forall u \in V, \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

Théorème de Lax-Milgram (théorème des projections)

Soit V un espace de Hilbert et l une forme linéaire continue sur V, et soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace $V \times V$, alors le problème variationnel, trouver la fonction $u \in V$ telle que

$$a(u,v) = l(v) \ , \forall v \in V$$

admet une solution unique $u \in V$.

Démonstration

La forme linéaire $l : V \to \mathbb{R}$, $(v \mapsto l(v))$ étant continue sur le Hilbert V donc d'après le théorème de Riesz, il existe un vecteur que l'on note $g \in V$, tel que $\forall v \in V$, on a

$$l(v) = \langle g, v \rangle_V \, .$$

D'autre part, pour $u \in V$ fixé, l'application $a : V \to \mathbb{R}$, $(v \mapsto a(u,v))$ définie une forme linéaire continue sur V. De nouveau, en appliquant le théorème de Riesz, il existe un vecteur que l'on note $Au \in V$, tel que $\forall v \in V$, on a

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle_V \, ,$$

avec A opérateur linéaire continu de V dans V $\;(A \in L(V,V))$, en effet

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u+\beta w),v\rangle &= a\left(\alpha u+\beta w,v\right), \\ &= \alpha a(u,v)+\beta a(w,v) \\ &= \alpha \left\langle Au,v\right\rangle +\beta \left\langle Aw,v\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha Au+\beta Aw,v\right\rangle . \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$A(\alpha u+\beta w)=\alpha Au+\beta Aw.$$

La recherche d'une fonction u,telle que $a(u,v)=l(v)$ revient, donc à la recherche de u, telle que

$$\left\langle Au,v\right\rangle_V=\left\langle g,v\right\rangle_V \;,\quad \forall v\in V,$$

ou encore

$$Au=g.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de u il suffit de montrer que A est une bijection de V dans V. Autrement dit $\forall g\in V$, il existe $u\in V$ unique, telle que $Au=g$

- A est injective, en effet si $Au=0\Rightarrow \left\langle Au,u\right\rangle_V=0$, or

$$\left\langle Au,u\right\rangle_V=a(u,u)\geq \alpha \left\Vert u\right\Vert_V^2 .$$

D'où

$$\left\Vert u\right\Vert_V=0\Rightarrow u=0,$$

d'où A injective.

- A est surjective, en effet AV est fermé dans V, car si $u_n\in AV$ est une suite convergente vers u dans V, alors $u\in AV$.

Soit $u_n\in AV\Rightarrow \exists v_n\in V$, telle que $u_n=Av_n$.

$$\begin{aligned} \left\langle u_m-u_n,v_m-v_n\right\rangle_V &= \left\langle Av_m-Av_n,v_m-v_n\right\rangle_V \\ &= \left\langle A\left(v_m-v_n\right),v_m-v_n\right\rangle_V \\ &= a\left(v_m-v_n,v_m-v_n\right) \\ &\geq \alpha \left\Vert v_m-v_n\right\Vert_V^2 . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha\left\|v_m-v_n\right\|_V^2 &\leq \left\langle u_m-u_n, v_m-v_n\right\rangle_V \\ \left\|v_m-v_n\right\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha}\left\langle u_m-u_n, v_m-v_n\right\rangle_V \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\left\|u_m-u_n\right\|_V\left\|v_m-v_n\right\|_V,\end{aligned}$$

ou encore

$$\left\|v_m-v_n\right\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left\|u_m-u_n\right\|_V.$$

D'où v_n est une suite de Cauchy dans V, donc elle est convergente vers un élément v de V, l'opérateur A étant continu, alorsAv_n converge vers $Av = u$ dans AV.

Montrons que $\{AV\}^{\perp} = \{0\}$.

Soit $u_0 \in \{AV\}^{\perp} \Rightarrow \forall u \in AV,\ \ \langle u, u_0\rangle_V = 0\ \Rightarrow \langle Av, u_0\rangle_V = 0\ \ \forall v \in V$ en particulier $\langle Au_0, u_0\rangle_V = 0 \Rightarrow a(u_0, u_0) = 0$, or

$$a(u_0, u_0) \geq \alpha\left\|u_0\right\|_V^2 \Rightarrow u_0 = 0.$$

Théorème

Soit V espace un Hilbert et l une forme linéaire continue sur V, et soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue, coercive et symétrique sur $V \times V$, alors la fonction $u \in V$ est une solution du problème

$$a(u,v) = l(v)\ , \forall v \in V\ ,$$

si et seulement si, u réalise le minimum de la fonction $J(v)$ donnée par

$$J(v) = a(v,v) - 2l(v).$$

Autrement dit

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V.$$

Démonstration:

- *Condition necéssaire*

Soit $u \in V$, telle que

$$a(u,v) = l(v), \ \forall v \in V, \tag{1}$$

montrons que $J(u) \leq J(v), \ \forall v \in V$.

De la coercivité de $a(u-v, u-v)$, on obtient

$$a(u-v, u-v) \geq 0,$$

ou encore

$$a(u,u) - 2a(u,v) + a(v,v) \geq 0,$$

il vient de la relation (1)

$$a(u,u) - 2l(v) + a(v,v) \geq 0,$$

ce qui implique

$$a(u,u) + J(v) \geq 0. \tag{2}$$

D'autres part si on prend $v = u$ dans la relation (1), on obtient

$$a(u,u) = l(u).$$

D'où il vient

$$\begin{aligned} a(u,u) &= 2a(u,u) - a(u,u) \\ &= 2l(u) - a(u,u) \\ &= -J(u). \end{aligned} \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) donnent

$$-J(u) + J(v) \geq 0,$$

ou encore

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V.$$

- *Condition suffisante*

On a la relation $J(u) \leq J(v)\ \forall v \in V$, montrons que $a(u,v) = l(v)\ \forall v \in V$.

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(v), \quad \forall v \in V \Rightarrow \\ J(u) &\leq J(u+\lambda v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u,u) - 2l(u) &\leq a(u+\lambda v, u+\lambda v) - 2l(u+\lambda v) \\ &= a(u,u) + 2\lambda a(u,v) + \lambda^2 a(v,v) - 2l(u) - 2\lambda l(v) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2\lambda a(u,v) + \lambda^2 a(v,v) - 2\lambda l(v) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\lambda > 0$,on a

$$2a(u,v) + \lambda a(v,v) - 2l(v) \geq 0,$$

en faisant tendre λ vers 0, on obtient $a(u,v) - l(v) \geq 0$.

Si $\lambda < 0$,on a

$$2a(u,v) + \lambda a(v,v) - 2l(v) \leq 0,$$

en faisant tendre λ vers 0, on obtient $a(u,v) - l(v) \leq 0$.

D'où

$$a(u,v) = l(v)\ \forall v \in V.$$

Théorème: *Soit Ω un ouvert régulier connexe de R^n de frontière Γ, telle que $\Gamma = \cup_{i=0}^m \Gamma_i$, avec les Γ_i disjoints deux à deux et* $\mathrm{mes}(\Gamma_0) > 0$. *Alors la semi-norme*

$$|u| = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

définit une norme sur V équivalente à la norme induite par $H^1(\Omega)$, où

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega), \text{tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 = 0 \right\}.$$

Démonstration: Pour démontrer que, $|.|$ est une norme, il suffit de montrer que, $|u| = 0 \Rightarrow u = 0$.

$$|u| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,\ \forall i = 1, ..., n,$$

ce qui implique que $u = C^{te}$ sur Ω, comme Ω est connexe et $u_{/\Gamma_0} = 0$, alors $u = 0$ dans Ω, d où $|u|$ est une norme.

Pour l'équivalence des normes $|u|$ et $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit de montrer l'existence de deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha\,|u| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta\,|u|\,.$$

La première inégalité est évidente avec $\alpha = 1$, La deuxème inégalité, on la démontre par l'absurde, on suppose que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\exists v_m \in V$, telle que $\|v_m\|_{H^1(\Omega)} > m\,|v_m|$, posons $w_m = \dfrac{v_m}{\|v_m\|_{H^1(\Omega)}}$, on obtient une suite w_m de fonctions de V, telle que

$$\|w_m\|_{H^1(\Omega)} = 1 \;\; \forall m \in \mathbb{N}^*$$